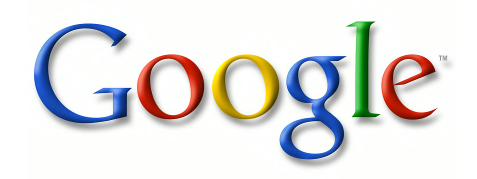



SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DES

QUANTITÉS COMPLEXES

PAR J. HOÜEL

Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences
de Bordeaux.

QUATRIÈME PARTIE

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES QUATERNIONS

(Extrait des *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*,
2e Série, t. Ier, 1er cahier.)

PARIS

GAUTHIER-VILLARS

IMPRIMEUR-LIBRAIRE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU
DES LONGITUDES, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1874

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DES

QUANTITÉS COMPLEXES

Bordeaux. — Imp. G. GOUNOUILHOU, rue Guiraude, 11.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DES

QUANTITÉS COMPLEXES

PAR

J. HOÜEL

Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences
de Bordeaux.



PARIS

GAUTHIER-VILLARS

IMPRIMEUR-LIBRAIRE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU
DES LONGITUDES, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1874

1878. Feb. 20,
Farrar Fund.
4e pt.
2.00

AVERTISSEMENT

En terminant aujourd'hui cet ouvrage, dont la première Partie a paru en 1867, je crois devoir entrer dans quelques explications sur le but que je me suis proposé et sur les secours dont j'ai fait usage.

La nouvelle théorie des quantités complexes, créée par Argand et par Cauchy, avait déjà donné naissance aux admirables découvertes qui ont si profondément transformé l'Analyse, avant qu'il n'existât un Traité élémentaire où les commençants pussent en prendre connaissance. On sait combien est pénible, en général, la lecture des Mémoires de Cauchy. Les beaux travaux de MM. Puiseux, Briot et Bouquet s'adressaient surtout à des mathématiciens exercés. Déjà la renommée des découvertes de Riemann commençait à se répandre; mais l'extrême concision des écrits de ce géomètre en rendait la lecture presque inabordable pour ceux qui n'avaient pu les entendre développer dans ses leçons.

En 1864, M. Durège, professeur à l'Université de Prague, publia un ouvrage destiné à combler cette lacune ([1]), et où l'on

([1]) *Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse, mit besonderer Berücksichtigung der Schöpfungen Riemann's bearbeitet.* Leipzig, 1 vol. in-8°. — Une seconde édition de ce livre a paru en 1873.

trouve pour la première fois exposés d'une manière élémentaire la théorie géométrique des imaginaires, ainsi que les théories analytiques fondées par Cauchy et complétées par Riemann.

Bientôt après, M. C. Neumann fit paraître un autre livre (1) où les mêmes principes sont développés avec une extrême clarté, et qui a puissamment contribué à répandre la connaissance de cette branche de l'Analyse.

J'entrepris successivement la traduction de ces deux excellents Traités. Mais, en attendant que les circonstances m'en permissent la publication, je pensai qu'il pourrait être utile de donner un aperçu de leur contenu; c'est ce que j'essayai de faire dans une suite de Mémoires, que la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux voulut bien accueillir dans le Recueil de ses publications, et dont la réunion forme le présent volume.

Outre l'intérêt qui s'attachait à la vulgarisation d'un mode d'exposition des théories de Cauchy, plus simple que celui que l'illustre auteur avait employé, mon but était de rectifier en même temps quelques données historiques qui ont généralement cours dans les pays voisins, et de mettre plus en lumière les noms d'Argand et de Cauchy, qui, dans plusieurs Traités modernes, sont omis, ou disparaissent derrière ceux de Gauss et de Riemann. En conséquence, j'ai placé en tête de mon travail quelques indications sur l'histoire de la découverte de la théorie moderne des quantités complexes, dont j'ai puisé les éléments soit dans les sources originales, soit dans un intéres-

(1) *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale.* Leipzig, 1865; 1 vol. in-8°.

sant Mémoire du professeur Matzka [1]. La conclusion qui ressort de cette étude est que la découverte de la véritable théorie des imaginaires appartient incontestablement à Robert Argand, qui l'a exposée dans un remarquable opuscule [2], imprimé vingt-cinq ans avant la célèbre Note de Gauss [3], tant de fois citée comme contenant la première indication de cette méthode.

Après avoir établi les fondements de la théorie des quantités complexes, et en avoir signalé les principales applications analytiques, je n'ai pas cru pouvoir passer sous silence une autre branche d'applications qui, bien que n'ayant pas encore atteint le même degré de développement que la précédente, n'en a pas moins rendu dès maintenant de notables services à la Géométrie et à la Physique. On trouve déjà dans l'opuscule d'Argand le premier germe d'une méthode d'Analyse géométrique, que M. Bellavitis a, depuis, reconstruite par ses propres recherches, et qui est devenue entre ses mains un puissant instrument d'investigation et de démonstration dans les questions de Géométrie plane. Hamilton, se plaçant à un point de vue plus général, a étendu cette méthode à la Géométrie de l'espace, en la fondant sur une Algèbre nouvelle, qu'il a nommée *Calcul des Quaternions*. Ces méthodes n'étant connues en France que par un petit nombre de Mémoires isolés, j'ai voulu contribuer à en propager la connaissance, en en exposant avec détail les premiers éléments, d'après les publications les plus récentes

---

(1) *Versuch einer richtigen Lehre von der Realität der vorgeblich imaginären Grössen der Algebra.* Prague, 1850.

(2) *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques,* Paris, 1806. — Cet opuscule fort rare vient d'être réimprimé. (Paris, Gauthier-Villars, 1874.)

(3) *Anzeige zur « Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda. »* Göttingen, 1831.

de M. Bellavitis et de M. Tait, qui l'un et l'autre m'ont gracieusement autorisé à faire de larges emprunts à leurs ouvrages.

J'ai divisé mon Traité en quatre Parties, ayant respectivement pour objet principal les découvertes d'Argand, de Cauchy, de Riemann, d'Hamilton.

La première, dont le fond est tiré des Mémoires d'Argand, contient l'Algèbre des quantités complexes.

La seconde est consacrée à l'exposition des travaux de Cauchy sur les fonctions qu'il a appelées *monogènes* et *monodromes*, et que j'ai désignées par le nom plus simple de fonctions *uniformes*, traduction de l'expression *eindeutig* employée par Riemann. J'ai suivi surtout dans cette théorie le livre de M. Neumann, dont j'ai cherché à donner un abrégé. J'y ai ajouté diverses applications empruntées tant aux ouvrages de Cauchy qu'à ceux de MM. Puiseux, Durège, Natani (1), Schlömilch (2), Casorati (3).

Dans la troisième Partie, pour laquelle j'ai principalement consulté les ouvrages de MM. Neumann, Durège et Thomae (4), j'explique la représentation des fonctions multiformes au moyen des plans à plusieurs nappes de Riemann; j'indique leur réduction au cas des fonctions uniformes, fondée sur la théorie de le connexion des surfaces, et je termine par l'inversion de l'intégrale elliptique de première espèce.

La quatrième Partie contient les premiers éléments de la

---

(1) HOFFMANN und NATANI, *Mathematisches Wörterbuch*. — NATANI, *Die höhere Analysis*.

(2) *Vorlesungen über einzelne Theile der höheren Analysis*. (II. Bd. des *Compendium der höheren Analysis*.)

(3) *Teorica delle funzioni di variabili complesse*. Milano, 1869.

(4) *Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen*. Halle, 1870.

méthode d'Analyse géométrique dans le plan et dans l'espace, fondée par Bellavitis et Hamilton sur l'emploi des quantités complexes. Pour préparer à la pratique de la nouvelle Algèbre qu'exige la méthode d'Hamilton, et familiariser avec l'emploi des nouveaux symboles, j'ai commencé par exposer, d'après Grassmann [1] et Hankel [2], les principes généraux de la théorie abstraite des opérations et ceux de la théorie des quantités complexes à un nombre quelconque de caractéristiques. Après avoir présenté des considérations générales sur la représentation des points dans l'espaee, j'ai consacré un chapitre à un aperçu sommaire de la méthode des équipollences de M. Bellavitis, et de son usage dans l'étude des courbes planes. Le reste du volume contient la théorie des Quaternions avec ses applications les plus simples à la Trigonométrie sphérique, à la composition des rotations, à la Géométrie des lignes et des surfaces, à la Cinématique du point. Les limites que je me suis imposées ne m'ont pas permis d'aborder la partie la plus importante et la plus intéressante des applications des quaternions, celles qui concernent la Physique mathématique. Mon ambition sera satisfaite si je suis parvenu à donner une idée de la fécondité de la méthode, et à préparer le lecteur à l'étude des grands ouvrages d'Hamilton [3] et du Traité élémentaire de son éminent disciple M. Tait [4].

J'ai cru pouvoir me permettre quelques légers changements dans les notations, en vue de me rapprocher autant que possible des habitudes reçues. Ainsi j'ai partout écrit le multiplica-

---

(1) *Ausdehnungslehre*. Stettin, 1862.

(2) *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen*. Leipzig, 1867.

(3) *Lectures on Quaternions*. Dublin, 1853. — *Elements of Quaternions*. London, 1866.

(4) *An elementary Treatise on Quaternions*. 2d Edition, Oxford, 1873.

teur *après* le multiplicande, contrairement à l'usage adopté par Hamilton. Mais cette innovation ne produit aucun changement essentiel dans la marche des calculs, et rien n'est plus aisé que de passer de l'un des systèmes de notation à l'autre. Je me suis attaché à distinguer autant que possible l'espèce des quantités par la différence de type des lettres employées pour les représenter.

Je dois adresser, en terminant, mes vifs remercîments à M. le capitaine Laisant, grâce auquel j'ai pu donner un *errata* étendu des fautes, malheureusement trop nombreuses, que j'ai laissées passer dans la correction des épreuves, et qui a bien voulu s'assujettir à revoir tous les calculs.

Bordeaux, le 1er septembre 1874.

ERRATA

Page	Au lieu de	Lisez
7, l. 6	56	66
30, l. 11	arc	axe
31, l. 10 en rem.	converge	convergence.
44, l. dernière	$(a+bi)^{\lambda n}$	$(a+bi)^{\lambda m}$
47, l. 1	r^p	r_p
87, l. 10	$D_x U$	$D_y U$
108, l. 3 en rem.	$i\int_0^{2\pi} f(\zeta)d\zeta$	$i\int_0^{2\pi} f(\zeta)d\gamma$...
109, l. 4	mettre le signe — devant le second membre.	
109, l. 10	$+\frac{(\zeta-c)^m}{(z-c)^m}\Big]$	$+\frac{(\zeta-c)^{m+1}}{(z-c)^m(\zeta-z)}\Big]$
109, l. 11	$+\frac{A_{-m}}{(z-c}$	$+\frac{A_{\ m}}{(z-c)^m}$
110, l. 15	intérieure à ce cercle.	extérieure à ce cercle.
110, l. 2 en rem.	$\left(\frac{\mathrm{r}}{R}\right)^n$	$\left(\frac{r}{R}\right)^n$.
148, l. 9 en rem.	$z=0$	$z'=0$
176, l. 6 en rem.	D_n^{n-1}	D_c^{n-1}
178, l. 13	effacer le signe — en tête de l'expression	
179, l. 5	$\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{z-\zeta}$	$\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$
179, l. 8 en rem.	$z-\zeta$	$\zeta-z$
195, l. 6 en rem.	n entier	m entier
195, l. 1 en rem.	$1-x^{2n}$	$1+x^{2n}$.

Page	Au lieu de	Lisez
197, l. 12	$\frac{\sin x}{a^2 + x^2}$	$\frac{x \sin x}{a^2 + x^2}$
203, l. 8 en rem.	$\varphi(z)$	$\varphi(x)$
203, l. 6 en rem.	$\int_{-}^{\infty}$	$\int_{-\infty}^{\infty}$
241, l. 5 en rem.	$\frac{r}{i}$	$\frac{i}{r}$
299, l. 12	$a \smile b'$	$a \frown b'$
300, l. 18	inverse de $\sqrt[b]{c}$,	$\sqrt[b]{c}$, inverse de
304, l. 5	(20)	(21)
304, l. 5 en rem.	$a \frown \bar{a}$	$\bar{a} \frown a$
304, l. 3 en rem.	$\bar{a} \frown a$	$a \frown \bar{a}$
305, éq. (31), 1er m.	$\frown \bar{b}$	$\frown b$
316, l. 12 en rem.	[25]	[385]
323, l. 12 / 329, l. 11 en rem.	parallélipipède	parallélépipède.
337, l. 11	AO — OD	AO — OC
341, l. dernière	$(1-\beta)B'$	$(1-\alpha)B'$
342, l. 2	$(1-\gamma)(\beta-\alpha)=0$	$(1-\gamma)(\beta-\alpha)F=0$
358, l. 6	$B' +$	$A' +$
358, éq. (3)	$(p-1)q + pr - qr$	$(p-1)q - pr + qr$
360, l. 5 en rem.	arg DC	arg CD
361, l. 5 en rem.	$= \frac{R'G}{R'A}$	$= \frac{R'G}{R'R}$
361, l. 4 en rem.	$= \frac{R'H}{R'A}$	$= \frac{R'G}{R'R}$
362, l. 9	$= RR'.R'G$	$= -RR'.R'G$
362, l. 11	GHR', HGR'	HGR', GHR'
364, l. 12 en rem.	$\bar{F} + \bar{A}_1 . B$	$\bar{F} + \bar{A}_1 . C$
364, l. 12 en rem.	$\bar{G} - A_2 . Z$	$\bar{G} - \bar{A}_2 . Z$
364, l. 10 en rem.	$G + KG$	$G + K\bar{G}$
364, l. 9 en rem.	A_2	A_2
365, l. 6 et 7	10M	10K
365, l. 8	10G	$10\bar{G}$
365, l. 9	$\bar{G}K$	$\bar{G}.K$
368, l. dernière	$x_\alpha = y_\beta$	$x_\alpha + y_\beta$

Page	Au lieu de	Lisez
370, l. 7 et 9 en rem.	462	461
371, l. 10	471, (3)	474, (6)
373, l. 3	$O'a$	Oa
373, l. 6	$= -\frac{1}{2}\delta t$	$= \frac{1}{2}\delta t$
374, l. 11 en rem.	$\frac{h^2 + h'^2}{2}$	$\frac{h^2 + h'^2}{4}$
374, l. dernière	δz	$\delta z'$
378, l. 16	$\zeta + 2\gamma$	$\zeta - 2\gamma$
380, l. 9 en rem.	$-\lambda \sin t + \mu \cos t$	$-\lambda \sin t + i\mu \cos t$
392, l. 8 en rem.	OM	OL
397, l. 3 en rem.	508	507
410, l. 11	$= a_0 b_0 - (a_0 b_i$	$= a_0 b_0 + \mathfrak{S}\, b_i a_i - (a_0 b_i$
412, l. 3 en rem.	$(a^{\frac{1}{\alpha}} A)^\alpha$	$(a^{\frac{1}{\alpha}} \mathrm{A})^\alpha$
421, l. dernière	530	529
424, l. 5	429	531
424, l. dernière	$= \frac{\sqrt{12}}{3}$	$= \frac{\sqrt{17}}{3}$
425, l. 8	$= \frac{1}{6}(2\mathrm{I} +$	$= \frac{1}{6}(2\mathrm{I}_1 +$
427, l. 4	HG...AB	HG...BA
429, l. 5	(13)	(13)'
430, l. 9	$+ \lvert a_3 b_1 \rvert c_2 - \lvert a_1 b_2 \rvert c_3$	$+ \lvert a_3 b_1 \rvert c_3 - \lvert a_1 b_2 \rvert c_2$
437, l. 10 en rem.	$= -\mathrm{B} - \mathrm{A}^{-1}\Sigma a b$	$= \mathrm{B} + \mathrm{A}^{-1}\Sigma a b$
438, l. 9 en rem.	$(\mathfrak{T} a)^2$	$(\mathfrak{T} A)^2$
443, l. 8	$= -2(\mathfrak{V} q_i c_i)^2$	$= 2(\mathfrak{V} q_i c_i)^2$
443, l. 11	$q_0(\mathrm{R} q_i + q_i \mathrm{R}) +$	$- q_0(\mathrm{R} q_i + q_i \mathrm{R})\mathrm{R} +$
446, l. 11 446, l. 10 en rem. 446, l. 7 en rem.	$\sum \mathfrak{V} A B x_i$	$\sum \mathfrak{V} A \bar{B} x_i$
446, l. 5 en rem.	$\sum \mathfrak{V} A B x_i = \mathfrak{V} \sum A B x_i$	$\sum \mathfrak{V} A \bar{B} x_i = \mathfrak{V} \sum A \bar{B} x_i$
448, l. 8	$= \lambda \mathrm{X}$	$= \lambda \mu \mathrm{X}$
448, l. 17	(2)	(7)
449, l. 10	(2)	(7)
454, l. 2 en rem.	$\mathrm{A}.\mathrm{A}^{-1}\mathfrak{S}\,\mathrm{BC}.\mathrm{B} +$	$\mathrm{A}.\mathrm{A}^{-1}\mathfrak{S}\,\mathrm{AC}.\mathrm{B} +$

Page	Au lieu de	Lisez
461, l. 5.........	$\mathfrak{V}_{E^2C}]$...............	$\mathfrak{V}_{ECE}]$
461, l. 7.........	$\mathfrak{V}_{CE.E}]$.............	$\mathfrak{V}_{CE.C}]$
463. l. 7.........	$= - \mathfrak{S}_{AA'A''})^2$.......	$= - (\mathfrak{S}_{AA'A''})^2$
463, l. 3 en rem..	$\mathfrak{S}(\square A.A'A'')$.........	$\mathfrak{S}(\square' A.A'A'')$
464, l. 15 en rem.	$\mathfrak{S}_{AA'A}.\mathfrak{S}$...........	$\mathfrak{S}_{AA'A''}.\mathfrak{S}$
464, l. 7 en rem..	$+ A''.(\mathfrak{S}_{C'B''}.\mathfrak{S}$........	$+ A''.(\mathfrak{S}_{CB''}.\mathfrak{S}$
470, l. dernière...	$\dfrac{g_1 + g_2}{2}$............	$\dfrac{g_1 + g_3}{2}$
471, l. 13 en rem.	monogène X.........	monogène de X
471, l. 4 en rem..	après « *partie principale* », ajoutez « de la différentielle ».	
476, l. 8.........	$= d\mathfrak{T}.\mathfrak{U}_X$..........	$d\mathfrak{T}_X.\mathfrak{U}_X$
476, l. dernière...	$\mathfrak{T}X =$..............	$d\mathfrak{T}X =$
478, l. 5 en rem..	$d\mathfrak{C}\overline{X}$................	$d\mathfrak{C}X$
479, l. 10 et 9 en r.	changer en — le premier signe + après le signe =.	
498, l. 12........	représentée par.......	représentée symboliquement par

QUATRIÈME PARTIE.

Applications géométriques de la Théorie des Quantités complexes. — Éléments de la Théorie des Quaternions.

CHAPITRE Ier.

SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE DES OPÉRATIONS

§ Ier.

Considérations générales.

352. Nous avons vu jusqu'ici comment, à l'aide des quantités négatives, puis des quantités complexes, on parvient à représenter par un symbole unique tout point d'un espace à une ou deux dimensions, et par un signe d'opération unique l'ensemble des opérations nécessaires pour passer d'un point à un autre de cet espace. Nous avons reconnu, en outre, que ces symboles peuvent être soumis à un calcul dont les règles comprennent, comme cas particuliers, les règles du calcul arithmétique.

Si, au lieu des points d'un espace à une ou à deux dimensions, c'est-à-dire au lieu des valeurs de quantités dépendantes d'une ou de deux variables, il s'agit de représenter des fonctions d'un nombre quelconque n de variables, ou, comme on dit d'une manière abrégée, des points d'un espace à n dimensions, les quantités complexes dont nous nous sommes occupés jusqu'ici ne suffisent plus, et il faut introduire des quantités complexes d'ordre supérieur, dans la composition

pesquelles entrent ***au moins n*** valeurs numériques indépendantes entre elles.

Mais ici la question se présente d'une manière beaucoup plus compliquée que dans les cas simples que nous avons traités jusqu'à présent. Il y a, pour chaque nombre de dimensions, une infinité de représentations possibles d'un point par un symbole complexe. Seulement, il s'en faut de beaucoup que toutes ces représentations se prêtent à l'établissement d'un algorithme simple et régulier. Pour se guider d'une manière sûre dans la recherche des règles de calcul qui conviennent à tel ou tel système, et qui dérogent plus ou moins aux lois du calcul arithmétique, il est nécessaire de s'appuyer sur les principes généraux de la théorie abstraite des opérations, ces dernières étant considérées indépendamment de la nature du ***substratum*** qui leur est soumis.

353. Dans chacune des opérations fondamentales de l'Algèbre, il y a deux choses à distinguer : la signification particulière de cette opération dans ses diverses applications aux objets réels, et les propriétés essentielles qni caractérisent cette opération, et qui sont communes aux diverses formes sous lesquelles elle se présente. Par exemple, l'addition des nombres consiste dans la réunion des groupes d'unités; celle des longueurs, des angles, etc., dans la juxtaposition ***extérieure*** de ces quantités; celle des forces, dans leur application à un même point suivant une même direction, etc. Dans toutes ces opérations si différentes pour le but et les moyens d'exécution, on retrouve un certain nombre de propriétés communes, sur lesquelles reposent entièrement les règles qui président à la combinaison de toutes ces mêmes opérations entre elles et avec les autres. Ces propriétés sont exprimées par les égalités suivantes :

1° pour $a = a'$, $a + b = a' + b$;

2° $a + (b + c) = (a + b) + c$;

3° $a + b = b + a$;

4° $a + 0 = 0 + a = a$.

C'est leur ensemble qui constitue proprement l'*addition;* on pourra appeler de ce nom toute opération, quels qu'en soient l'objet et la nature, qui jouira de ces quatre propriétés, et lui appliquer immédiatement les règles établies pour l'addition arithmétique.

354. Lorsque nous avons montré comment on avait été amené à introduire de nouvelles espèces de quantités, telles que les quantités négatives et les quantités complexes, nous avons fait voir en même temps que l'on devait modifier la nature concrète des opérations, et donner pour celles-ci de nouvelles définitions, fondées sur l'étude directe des nouvelles quantités. Ces définitions posées, nous avons commencé par examiner si l'opération modifiée jouit encore de toutes les propriétés de l'opération primitive qu'elle remplace, et qu'elle comprend comme cas particulier. Pour les cas qui se sont présentés jusqu'ici, nous avons généralement reconnu la persistance des propriétés fondamentales, du moins en ce qui concerne les opérations *directes*. Il en est résulté que nous n'avons pas eu à modifier les règles de l'Algèbre des quantités réelles pour les appliquer aux opérations directes relatives aux quantités complexes. Quant aux opérations *inverses* (extraction des racines, résolution des équations, etc.), la considération des quantités complexes a permis de donner à cette partie de l'Algèbre une généralité et une symétrie qui lui eussent manqué sans cela.

355. Mais il n'en sera pas toujours ainsi pour les espèces de quantités que nous aurons à considérer dans la représentation des espaces à plus de deux dimensions. Il pourra se faire que certaines des propriétés dont jouit une opération arithmétique deviennent incompatibles dans l'opération nouvelle que l'on est porté à lui assimiler. Il importe alors de savoir, parmi les règles déduites de ces propriétés en Arithmétique, quelles seront celles qui subsisteront pour les nouvelles quantités et quelles modifications les autres devront

subir. On conçoit dès lors quelle doit être l'utilité d'une étude générale et abstraite des opérations, fondée uniquement sur les propriétés qu'on leur suppose, et sans aucun égard à la manière dont ces propriétés ont été établies, non plus qu'à l'existence ou à la non-existence d'objets réels auxquels ces opérations soient applicables.

356. En raison de la multiplicité des moyens de passer d'un point donné à un autre point donné dans un espace à n dimensions, on peut choisir de plusieurs manières tant la composition des symboles représentatifs de ces points, que la définition des opérations fondamentales pour le passage d'un point à l'autre. Pour se guider dans ce choix, on observera que, un espace à n dimensions comprenant comme cas particuliers les espaces d'un nombre de dimensions moindre, les règles de calcul qui correspondent à n dimensions doivent, pour être générales, s'appliquer aux espaces d'ordre inférieur, et contenir, par conséquent, comme cas spécial, les règles établies pour ces espaces plus simples. C'est ainsi que les règles de calcul des quantités négatives contiennent celles des quantités arithmétiques, et sont contenues à leur tour dans celles des quantités complexes. Ce principe, que l'on doit observer dans les généralisations successives, nous l'appellerons, suivant l'expression proposée par Hankel, le *principe de permanence* des règles de calcul.

En vertu de ce principe, tout calcul fait pour les quantités généralisées doit s'appliquer aux quantités d'ordre inférieur, la généralisation ne pouvant introduire de nouvelles propriétés, ni donner lieu, par conséquent, à des règles qui ne résulteraient pas déjà des propriétés antérieurement admises.

357. Mais il peut se faire que quelques-unes des propriétés des opérations disparaissent dans la généralisation, ce qui ne permet plus de pratiquer les simplifications précédemment permises. Lorsque plusieurs propriétés deviennent contradictoires, et que l'on est forcé d'en sacrifier quelques-unes, on

doit alors chercher à conserver les plus importantes, celles qui se prêtent le mieux à l'établissement des règles de calcul simples et générales. C'est là, en quelque sorte, le principe réciproque du principe de permanence. Mais on ne peut donner sur son application de règles plus précises, et la question doit être directement posée dans chaque cas particulier.

358. Les considérations que nous allons exposer ne se bornent pas seulement aux combinaisons immédiates des quantités simples ou complexes; elles s'étendent aux combinaisons des signes d'opération, et même aux combinaisons d'idées de nature quelconque, pourvu que le sens des signes que nous emploierons puisse toujours être défini sans aucune ambiguïté et avec la précision mathématique. Aussi éviterons-nous d'employer le mot de *quantités*, en parlant des *substrata* de nos opérations; nous les désignerons par le terme plus vague et plus compréhensif d'*objets*, également applicable au concret et à l'abstrait.

§ II.

Propriétés générales des opérations.

359. Deux *combinaisons* d'objets sont dites *égales* entre elles, lorsqu'elles peuvent se remplacer mutuellement, sans que le résultat soit altéré.

360. Si a et b désignent deux objets de nature quelconque, semblable ou différente, nous représenterons par le signe $a \frown b$ un troisième objet formé par une combinaison ou opération quelconque faite sur les deux premiers.

361. L'opération $\frown$ sera dite *uniforme*, si,

$$(1) \qquad \text{pour} \left\{ \begin{array}{l} a = a', \\ b = b', \end{array} \right\} \text{on a nécessairement } a \frown b = a' \frown b'.$$

Elle sera dite *associative*, si, a, b, c étant trois objets quelconques, on a l'égalité

$$(2) \qquad (a \frown b) \frown c = a \frown (b \frown c).$$

Dans ce cas, la valeur commune des deux membres pourra se désigner convenablement, en supprimant les parenthèses, par

$$a \frown b \frown c.$$

En étendant cette notation, on a, en vertu de la propriété associative,

$$\begin{aligned}[(a \frown b) \frown c] \frown d = [a \frown (b \frown c)] \frown d = (a \frown b) \frown (c \frown d) \\ = (a \frown b \frown c) \frown d = a \frown b \frown c \frown d,\end{aligned}$$

et ainsi de suite. On voit que, quel que soit le nombre des objets qui doivent être successivement combinés par une opération associative, on peut toujours remplacer plusieurs objets consécutifs par le résultat de leur combinaison, et *vice versa*.

362. Une opération est *commutative*, si l'on a, quels que soient a et b,

$$(3) \qquad a \frown b = b \frown a.$$

363. Exemples. L'addition et la multiplication arithmétiques sont des opérations uniformes, associatives et commutatives. En effet, les égalités précédentes subsistent, lorsqu'on y remplace le symbole général $\frown$ soit par le signe $+$, soit par le signe $\times$.

364. Une opération peut être associative sans être commutative. Nous en verrons plus tard un exemple dans la multiplication des quaternions.

Une opération peut être commutative sans être associative. Telle est l'opération qui consiste à prendre la moyenne arithmétique de deux quantités; on a, en effet,

$$a \frown b = \frac{a+b}{2} = \frac{b+a}{2} = b \frown a,$$

tandis que

$$(a \frown b) \frown c = \frac{\frac{a+b}{2} + c}{2}$$

n'est pas égal à

$$a \frown (b \frown c) = \frac{a + \frac{b+c}{2}}{2}.$$

Enfin, une opération peut n'être ni associative ni commutative. Ainsi, le résultat de l'opération exponentielle

$$a \frown b = a^b,$$

diffère de

$$b \frown a = b^a;$$

de plus,

$$(a \frown b) \frown c = (a^b)^c$$

n'est pas égal à

$$a \frown (b \frown c) = a^{(b^c)}.$$

365. Si l'on représente par les signes $\frown$ et $\uparrow$ deux opérations quelconques de nature différente, l'opération $\frown$ sera dite ***distributive relativement à l'opération*** $\uparrow$, si l'on a

(4) $$(a \uparrow b) \frown c = (a \frown c) \uparrow (b \frown c),$$

ou encore

(5) $$a \frown (b \uparrow c) = (a \frown b) \uparrow (a \frown c).$$

Dans le premier cas, elle sera distributive ***par rapport à son premier terme;*** dans le second, elle le sera ***par rapport à son second terme.***

Ces deux définitions de la distributivité coïncident évidemment, si l'opération $\frown$ est commutative. Car de la propriété (4) on tire alors

$$a \frown (b \uparrow c) = (b \uparrow c) \frown a = (b \frown a) \uparrow (c \frown a) = (a \frown b) \uparrow (a \frown c).$$

C'est ainsi que la multiplication arithmétique est distributive relativement à l'addition, puisqu'on a

$$(a+b)\times c = a\times c + b\times c,$$
$$a\times(b+c) = a\times b + a\times c,$$

équations qui sont la conséquence l'une de l'autre, en vertu de la commutativité.

L'élévation aux puissances est distributive relativement à la multiplication, par rapport à son premier terme, puisque l'on a, conformément à l'égalité (4),

$$(a\times b)^c = a^c\times b^c\,;$$

mais elle ne l'est pas relativement à son second terme, car

$$a^{b\times c} \text{ n'est pas égal à } a^b\times a^c.$$

366. Les opérations peuvent encore jouir d'autres propriétés spéciales, qui servent à les caractériser, et qui se rapportent à des déterminations particulières des objets.

L'addition, par exemple, jouit de la propriété que, si l'un quelconque des deux termes s'annule, le résultat se réduit au terme restant, c'est-à-dire que l'on a

$$(6)\qquad \begin{cases} a\frown 0 = a, \\ 0\frown a = a, \end{cases}$$

l'une des deux équations découlant ici de l'autre, en vertu de la commutativité.

La multiplication jouit de la double propriété que, 1° si l'un des objets s'annule, le résultat s'annule,

$$(7)\qquad \begin{cases} a\frown 0 = 0, \\ 0\frown a = 0; \end{cases}$$

2° si l'un des objets se réduit à l'unité, le résultat se réduit à l'autre objet,

$$(8)\qquad \begin{cases} a\frown 1 = a, \\ 1\frown a = a, \end{cases}$$

les deux égalités (7) découlant l'une de l'autre, de même que les égalités (8), en vertu de la commutativité.

367. Ces propriétés générales, exprimées par les équations (1) à (8), suffisent pour établir toutes les règles de l'addition et de la multiplication algébriques, d'où il s'ensuit que ces mêmes règles s'appliqueront à toute opération qui jouira des mêmes propriétés que l'addition ou que la multiplication. C'est ce que l'on exprimera d'une manière abrégée en donnant à cette opération le nom d'addition ou de multiplication.

Ainsi on pourra nommer *addition* toute opération qui sera 1° uniforme, 2° associative, 3° commutative, 4° qui satisfera aux conditions (6).

On pourra nommer *multiplication* toute opération qui sera 1° uniforme, 2° associative, 3° commutative, 4° distributive relativement à l'addition, 5° qui satisfera aux conditions (7) et (8).

Les opérations ainsi nommées se combineront suivant les règles correspondantes de l'Algèbre ordinaire.

§ III.

Des opérations inverses.

368. Supposons un objet c déterminé au moyen de deux autres a et b, par l'opération

$$a \frown b = c. \tag{9}$$

Il arrivera généralement que l'un quelconque des objets a, b sera aussi déterminé, lorsque l'on connaîtra l'autre et en même temps l'objet résultant c. L'opération qui sert à trouver b connaissant a et c, ou a connaissant b et c est dite une opération *inverse* de l'opération *directe* marquée par le signe $\frown$. Nous indiquerons cette opération inverse par le signe précédent renversé $\smile$.

369. Si l'opération directe $\frown$ est commutative, l'équation (9) pourra s'écrire aussi sous la forme

$$b \frown a = c,$$

et par conséquent a sera déterminé au moyen de b et de c par la même opération que b au moyen de a et de c, de sorte que, en désignant, comme nous venons de le dire, cette dernière opération par le signe $\smile$, on aura à la fois

(10) $$b = c \smile a,$$

et

(10)' $$a = c \smile b.$$

Dans ce cas l'opération $\frown$ n'admettra qu'une seule opération inverse.

Mais, si l'opération directe $\frown$ n'est pas commutative, les deux équations (10) et (10)' ne seront plus vraies ensemble, et, au lieu d'une seule opération inverse, il y en aura deux distinctes, suivant que l'on aura pris pour inconnue le second ou le premier terme de la combinaison $a \frown b$.

Si l'on désigne toujours par $\smile$ l'opération qui donne b au moyen de c et de a, il faudra alors prendre un autre signe, tel que $\smile'$, pour l'opération qui donne a au moyen de c et de b, et la relation (10)' sera remplacée par cette autre

(11) $$a = c \smile' b.$$

Par exemple, l'addition et la multiplication arithmétiques, étant des opérations commutatives, n'auront, chacune, qu'une seule opération inverse.

L'opération exponentielle

$$a \frown b = a^b = c,$$

n'étant pas commutative, admettra deux opérations inverses, définies par les égalités

$$b = c \smile a = \log_a c,$$
$$a = c \smile' b = \sqrt[b]{c}.$$

370. Par la définition même de l'opération inverse $\smile$, on a, à cause de $c \smile a = (a \frown b) \smile a$, l'identité

(12) $$(a \frown b) \smile a = b,$$

qui peut être considérée comme la définition de l'opération $\smile$.

De même, de l'égalité (11) résulte l'identité

(13) $$(a \frown b) \smile' b = a ,$$

qui peut être considérée comme la définition de l'opération $\smile'$.

371. L'égalité (9) peut s'écrire, en vertu des égalités (10) et (11), sous les deux formes

(14) $$a \frown (c \smile a) = c ,$$

(15) $$(c \smile' b) \frown b = c ,$$

qui définissent l'opération $\frown$ comme inverse de chacune des opérations $\smile$ et $\smile'$.

372. Si l'égalité

$$a \frown b = a \psi b' ,$$

ne peut subsister qu'avec l'égalité $b = b'$, c'est-à-dire si le résultat de l'opération $\frown$ change nécessairement lorsqu'on fait varier le second terme b, alors l'opération inverse $\smile$, définie par l'égalité (10) sera *uniforme*. Cela revient à dire que l'équation

$$a \frown x = c ,$$

où x est l'inconnue, n'admet qu'ne seule solution, laquelle est donnée par la formule

$$(a \frown x) \smile a = x = c \smile a .$$

De même, si l'égalité

$$a \frown b = a' \frown b$$

entraîne l'égalité $a = a'$, l'opération inverse $\smile'$, définie par l'égalité (11), sera uniforme, et l'équation

$$x \frown b = c$$

n'aura qu'une seule solution.

Lorsqu'une opération est uniforme en même temps que ses opérations inverses, nous dirons, pour abréger, qu'elle est *complètement uniforme*.

373. Par exemple, une somme variant nécessairement lorsqu'un de ses termes varie seul, son opération inverse, la soustraction, est uniforme. Il en est de même de la division, inverse de la multiplication, sauf le cas où les deux termes du quotient sont nuls, $a \times 0$ ne variant pas avec a.

Les deux opérations, $\sqrt[b]{c}$, $\log_a c$, inverses de l'opération exponentielle, sont uniformes au point de vue de l'Arithmétique. Mais au point de vue algébrique, l'expression

$$a \frown b = a^b + a^{-b} = c$$

ne variant pas, lorsqu'on change b en $-b$, il en résulte que l'opération inverse qui donne

$$b = c \smile a$$

donnera pour b deux valeurs égales et de signe contraire; elle sera donc *biforme*. Il en sera de même pour l'opération inverse de $a \frown b = a^b = (-a)^b$, qui détermine a, lorsque b sera un nombre entier et pair.

Enfin, au point de vue des quantités complexes, l'opération inverse de $\sqrt[b]{c}$, l'exponentielle admet b solutions pour b entier (art. 70); l'opération $\log_a c$ en admet une infinité (art. 87).

§ IV.

Propriétés des opérations associatives.

374. Étudions maintenant les propriétés les plus essentielles des *opérations associatives*, et établissons certaines formules importantes concernant ces opérations.

Supposons que l'opération directe $\frown$ soit uniforme et associative, et soit $\smile$ son opération inverse, définie par l'équation (12)

$$(a \frown b) \smile a = b.$$

Considérons l'expression

$$x = (a \smile b) \frown c.$$

Substituons successivement chacun des deux membres de cette égalité à la place du second terme y de l'expression $b \frown y$, ou, comme nous le dirons d'une manière plus abrégée, *opérons par* $b \frown$ sur chacun des deux membres de l'égalité. L'opération $\frown$ étant uniforme, il viendra

$$b \frown x = b \frown [(a \smile b) \frown c] .$$

L'opération $\frown$ étant associative, le second membre pourra s'écrire sous la forme

$$[b \frown (a \smile b)] \frown c = a \frown c ,$$

en vertu de l'égalité (14), d'où

$$b \frown x = a \frown c .$$

Opérons maintenant par $\smile b$ sur les deux membres; on aura d'après (12), en mettant pour x sa valeur,

(16) $$(a \smile b) \frown c = (a \frown c) \smile b .$$

Ainsi, dans le cas même où la multiplication n'est pas commutative, et où la division est définie par l'égalité

dividende = diviseur $\times$ quotient,

on a

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a.c}{b} .$$

375. Soit maintenant l'expression

$$x = (a \smile b) \smile c ;$$

on aura [éq. (14) et (12)], en opérant par $c \frown$, puis par $b \frown$, et enfin par $\smile (b \frown c]$,

$$c \frown x = c \frown [(a \smile b) \smile c] = a \smile b ,$$
$$b \frown (c \frown x) = (b \frown c) \frown x = b \frown (a \smile b) = a ,$$
$$[(b \frown c) \frown x] \smile (b \frown c) = x = a \smile (b \frown c) ,$$

Donc

(17) $$(a \smile b) \smile c = a \smile (b \frown c) .$$

Ainsi

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}=\frac{a}{b.c}.$$

376. Soit encore l'expression

$$x=(a\frown b)\smile c.$$

On trouvera successivement

$$c\frown x=c\frown[(a\frown b)\smile c]=a\frown b,$$
$$(c\frown x)\smile a=(a\frown b)\smile a=b=(c\smile a)\frown x\ [\text{éq. (16)}],$$
$$b\smile(c\smile a)=[(c\smile a)\frown x]\smile(c\smile a)=x,$$

d'où l'on tire la relation

(18) $$b\smile(c\smile a)=(a\frown b)\smile c,$$

puis, en ayant égard à l'égalité (16), cette autre relation

(19) $$b\smile(c\smile a)=(a\smile c)\frown b.$$

Ainsi

$$\frac{a.b}{c}=\frac{b}{\left(\frac{c}{a}\right)}=\frac{a}{c}.b.$$

377. Nous appellerons *module* d'une opération $\frown$ un objet m qui, combiné à l'aide de cette opération avec un autre objet quelconque a, donne pour résultat l'objet a lui-même, de manière que l'on ait, quel que soit a,

(20) $$a\frown m=a.$$

Pour l'addition, $m=0$; pour la multiplication, $m=1$.

On a, par le principe associatif,

$$a\frown(m\frown c)=(a\frown m)\frown c=a\frown c,$$

d'où, en supposant l'opération *complètement* uniforme,

$$m\frown c=c.$$

Donc l'équation (20), jointe aux propriétés d'associativité et d'uniformité complète, entraîne l'équation

(21) $$m\frown a=a,$$

c'est-à-dire que la propriété du module subsiste, qu'on le prenne pour premier terme ou pour second terme de la combinaison.

On a de plus [éq. (21) et 10)],

$$a \smile m = (m \frown a) \smile m = a\,.$$

Donc

(22) $$a \smile m = a\,.$$

La propriété du module, exprimée par l'équation (20), a donc lieu aussi pour l'opération inverse relative au second terme, et définie par l'équation (10)

378. En opérant par $\smile a$ sur l'équation (20), on a

(23) $$(a \frown m) \smile a = m = a \smile a\,.$$

Donc on obtient le module d'une opération en exécutant l'opération inverse $\smile$ sur un objet quelconque, combiné avec un autre objet identique au premier.

On a ainsi, pour l'addition, $m = a - a = 0$; pour la multiplication, $m = \frac{a}{a} = 1$.

379. Nous venons de voir que chacune des trois combinaisons $a \frown m$, $m \frown a$, $a \smile m$ se réduit à a. Il nous reste à examiner la combinaison $m \smile a$, qui n'a plus la même propriété. Nous appellerons le résultat de cette combinaison l'*objet réciproque* de l'objet a, et nous le représenterons par la notation

(24) $$m \smile a = \bar{a}\,.$$

D'après cela, dans le cas de l'addition, l'objet réciproque de a sera $0 - a$ ou $-a$; dans le cas de la multiplication, ce sera $\frac{1}{a}$.

Les deux objets a et $\bar{a}$ sont dans une relation de réciprocité mutuelle. En effet, la relation (18) donne, en y faisant $b = c = m$,

$$m \smile \bar{a} = m \smile (m \smile a) = (a \frown m) \smile m = a \smile m = a\,;$$

donc a est l'objet réciproque de $\bar{a} = m \smile a$.

380. L'introduction du signe de réciprocité permet de remplacer une opération par son inverse. En effet,

1° L'égalité (16) donne, en y faisant $a = m$,

$$(m \frown c) \smile b = (m \smile b) \frown c,$$

c'est-à-dire [(24), (20)]

(25) $$c \smile b = \bar{b} \frown c \text{ [1]}.$$

Ainsi,

$$\frac{c}{b} = \frac{1}{b} . c .$$

2° De même, l'égalité (18) donne, en faisant $c = m$,

$$b \smile (m \smile a) = (a \frown b) \smile m,$$

c'est-à-dire [(24), (22)]

(26) $$a \frown b = b \smile \bar{a} .$$

Ainsi

$$a.b = \frac{b}{\left(\frac{1}{a}\right)} .$$

3° Faisant, dans (19), $b = m$, on a

$$m \smile (c \smile a) = (a \smile c) \frown m,$$

ou

(27) $$a \smile c = \overline{c \smile a},$$

c'est-à-dire qu'en échangeant entre eux les deux termes d'une

---

[1] En particulier

(25)* $$a \smile a = a \frown \bar{a} = m,$$

ou, en changeant a en $\bar{a}$, et remarquant que a est le réciproque de $\bar{a}$,

(25)** $$\bar{a} \frown a = m .$$

Donc l'opération directe entre un objet et son réciproque est toujours commutative, et donne pour résultat le module.

combinaison par l'opération inverse $\smile$, le résultat se change dans l'objet réciproque. Par exemple,

$$\frac{a}{c}=\frac{1}{\left(\frac{c}{a}\right)}.$$

4° Enfin, dans (17), faisons $a=m$; il viendra

$$(m\smile b)\smile c = m\smile(b\frown c),$$

ou [(24), (26)], c étant le réciproque de $\bar{c}$,

(28) $$\bar{b}\smile c=\overline{b\frown c}=\bar{c}\frown\bar{b}.$$

Ainsi

$$\frac{\left(\frac{1}{b}\right)}{c}=\frac{1}{b.c}=\frac{1}{c}.\frac{1}{b}.$$

381. A l'aide de la notation des objets réciproques, on peut écrire les équations (16), (17), (18), (19) sous la forme

(29) $$(\bar{b}\frown a)\frown c=\bar{b}\frown(a\frown c),$$

(30) $$\bar{c}\frown(\bar{b}\frown a)=(\overline{b\frown c})\frown a=(\bar{b}\smile c)\frown a=(\bar{c}\frown\bar{b})\frown a,$$

(31) $$(\overline{a\frown c})\frown\bar{b}=\bar{c}\frown(a\frown b)=(\bar{c}\frown a)\frown b,$$

et ces nouvelles égalités transforment les formules établies pour l'opération inverse, laquelle n'est pas associative, en formules associatives, relatives seulement à l'opération directe.

382. Supposons maintenant que l'opération directe $\frown$ ne soit plus seulement *associative*, mais encore *commutative*, de sorte que l'on ait, pour deux objets quelconques

$$a\frown b=b\frown a.$$

On pourra alors, aux formules précédentes, en joindre quelques autres.

Les formules (12) et (14) donneront les suivantes,

(32) $$(b\frown a)\smile a=b,$$

(33) $$(c\smile a)\frown a=c.$$

Dans l'équation (17), remplaçons b par $b \smile c$, on aura [éq. (14)]

$$[a \smile (b \smile c)] \smile c = a \smile [(b \smile c) \frown c] = a \smile [c \frown (b \smile c)] = a \smile b,$$

d'où, en opérant par $c \frown$,

$$c \frown \{[a \smile (b \smile c)] \smile c\} = a \smile (b \smile c) = c \frown (a \smile b).$$

Donc, *si l'opération $\frown$ est commutative,* on aura la relation

$$(34) \qquad a \smile (b \smile c) = c \frown (a \smile b).$$

Ainsi, dans le cas où $\frown$ représente la multiplication arithmétique, qui est commutative, on a

$$\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = c \cdot \frac{a}{b}.$$

383. Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que l'opération directe $\frown$, pratiquée sur une série d'objets

$$(A) \qquad a, b, c, \ldots,$$

était toujours possible, et donnait pour résultat un objet appartenant à cette même série, que nous appellerons la *série directe.*

Mais il pourra bien se faire que l'opération inverse ne soit pas toujours possible aux mêmes conditions. Par exemple, si la série (A) se compose des nombres positifs et entiers, les résultats des opérations $a - b$ et $\frac{a}{b}$ pourront bien ne pas être exprimables par des nombres de cette série.

L'opération inverse $\smile$ sera, dans ce cas, *impossible,* à moins que l'on ne puisse ajouter à la série (A) une série complémentaire, et que les opérations, directe et inverse, ne puissent être généralisées de manière à s'appliquer aux objets de la nouvelle série, et à faire passer d'une série à l'autre.

C'est à cette condition que la définition des quantités réciproques, donnée au n° 379, peut être acceptable dans tous les cas.

384. Supposons que l'opération directe, ainsi généralisée, conserve sa propriété associative, ce que l'on devra constater dans chaque cas particulier. Dès lors, toutes les formules établies jusqu'ici et fondées sur cette propriété continueront à subsister.

En particulier, il résulte de l'équation (27) que les deux objets $a \smile b$ et $b \smile a$ seront réciproques l'un de l'autre.

Si donc l'une de ces opérations est exécutable au moyen des objets de la série directe (A), l'autre opération conduira à un objet de la série

$$(\bar{A}) \qquad \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots,$$

formée avec les objets réciproques de ceux de la première, et que nous appellerons la ***série réciproque.***

S'il en est ainsi, toutes les équations (25)-(31) auront lieu pour l'ensemble des deux séries (A), ($\bar{A}$), et l'on pourra, en remplaçant un objet de l'une par son correspondant dans l'autre, transformer une opération dans l'opération inverse.

Si l'on admet, de plus, que l'opération $\frown$ soit commutative pour les objets des deux séries, les formules (32)-(34) continueront à subsister après la généralisation.

§ V.

De la propriété distributive.

385. Soient deux opérations directes différentes, que nous désignerons par les signes $\uparrow$ et $\frown$. On peut exprimer [365] de deux manières différentes la distributivité de la seconde par rapport à la première, en disant qu'elle est distributive soit par rapport au premier terme, soit par rapport au second, c'est-à-dire que l'on a l'une ou l'autre des deux équations

$$(35) \qquad (a \uparrow b) \frown c = (a \frown c) \uparrow (b \frown c),$$

$$(36) \qquad a \frown (b \uparrow c) = (a \frown b) \uparrow (a \frown c).$$

Si les deux équations (35) et (36) ont lieu en même temps, la distributivité sera *complète*. On aura alors

$$
\begin{aligned}
(a\uparrow b)\frown(c\uparrow d) &= [a\frown(c\uparrow d)]\uparrow[b\frown(c\uparrow d)]\\
&= [(a\frown c)\uparrow(a\frown d)]\uparrow[(b\frown c)\uparrow(b\frown d)]\\
&= [(a\uparrow b)\frown c]\uparrow[(a\uparrow b)\frown d]\\
&= [(a\frown c)\uparrow(b\frown c)]\uparrow[(a\frown d)\uparrow(b\frown d)].
\end{aligned}
$$

Si l'opération $\uparrow$ est associative, on devra donc avoir, en transposant les crochets,

$$
\begin{aligned}
&(a\frown c)\uparrow[(a\frown d)\uparrow(b\frown c)]\uparrow(b\frown d)\\
&\qquad\qquad = (a\frown c)\uparrow[(b\frown c)\uparrow(a\frown d)]\uparrow(b\frown d),
\end{aligned}
$$

et par suite, si cette même opération est complètement uniforme [372], il faudra que l'on ait

$$(a\frown d)\uparrow(b\frown c) = (b\frown c)\uparrow(a\frown d),$$

et comme $a\frown d$ et $b\frown c$ sont des objets quelconques, l'opération $\uparrow$ devra être, de plus, commutative.

On voit donc que, l'opération $\uparrow$ étant supposée associative et complètement uniforme, la condition nécessaire et suffisante pour que la distributivité, par rapport à $\uparrow$, de l'opération $\frown$, relativement à l'un de ses termes entraîne la distributivité relativement à l'autre, est que l'opération $\uparrow$ soit commutative.

386. Considérons maintenant les objets de la série $(\bar{A})$, réciproque de (A) par rapport à l'opération $\uparrow$ [1]. En faisant $b=\bar{a}$ dans l'égalité (35), il vient, à cause de $a\uparrow\bar{a}=\mu$ [éq. (25)*, art. 380, Note], μ étant le module de l'opération $\uparrow$,

$$(a\uparrow\bar{a})\frown c = (a\frown c)\uparrow(\bar{a}\frown c) = \mu\frown c,$$

---

(1) Par exemple, si $\uparrow$ est le signe $+$ de l'addition, la série $(\bar{A})$ sera la série des quantités négatives.

et, si l'opération $\frown$ est telle que l'on ait (*)

(37) $$\mu \frown c = \mu,$$

on en conclura

$$(a \frown c) \uparrow (\bar{a} \frown c) = \mu,$$

d'où, en désignant par $\downarrow$ l'opération inverse de $\uparrow$, et opérant par $\downarrow (a \frown c)$,

(38) $$\bar{a} \frown c = \mu \downarrow (a \frown c) = \overline{a \frown c},$$

c'est-à-dire que $\bar{a} \frown c$ est l'objet réciproque de $a \frown c$ par rapport à l'opération $\uparrow$.

Posant, de même, $c = \bar{b}$ dans l'égalité (36), et admettant que l'opération $\frown$ soit telle que l'on ait (*)

(39) $$a \frown \mu = \mu,$$

on trouvera

(40) $$a \frown \bar{b} = \overline{a \frown b},$$

c'est-à-dire que $a \frown \bar{b}$ est le réciproque de $a \frown b$.

Enfin, on a, dans l'hypothèse de la distributivité complète, à cause des relations (38) et (40), et en admettant les égalités (37) et (39),

$$\begin{aligned}(a \uparrow \bar{a}) \frown (b \uparrow \bar{b}) &= \mu \frown \mu = \mu \\ &= (a \frown b) \uparrow (a \frown \bar{b}) \uparrow (\bar{a} \frown b) \uparrow (\bar{a} \frown \bar{b}) \\ &= (a \frown b) \uparrow (\overline{a \frown b}) \uparrow (\overline{a \frown b}) \uparrow (\bar{a} \frown \bar{b}) \\ &= \mu \uparrow (\overline{a \frown b}) \uparrow (\bar{a} \frown \bar{b}) = (\overline{a \frown b}) \uparrow (\bar{a} \frown \bar{b}),\end{aligned}$$

d'où, en opérant par $\downarrow (\overline{a \frown b})$,

(41) $$\bar{a} \frown \bar{b} = \mu \downarrow (\overline{a \frown b}) = a \frown b.$$

(*) Pour $\uparrow = +$, $\frown = \times$, on a $\mu = 0$, et alors $\mu \times c = 0 = \mu$, $a \frown \mu = 0 = \mu$.

Exemples :

$$(-b)\times c = -(b\times c),$$
$$a\times(-c) = -(a\times c),$$
$$(-a)\times(-b) = (a\times b).$$

387. Considérons enfin la combinaison de l'opération $\uparrow$ avec l'opération $\smile$ inverse de $\frown$. On a, en supposant $\frown$ associative et distributive relativement à $\uparrow$,

$$(b\frown d)\frown[(a\smile b)\uparrow(c\smile d)] = [b\frown d\frown(a\smile b)]\uparrow[b\frown d\frown(c\smile d)]$$
$$= (b\frown d\frown\bar{b}\frown a)\uparrow(b\frown c),$$

d'où, en opérant par $\smile(b\frown d)$

(42) $$(a\smile b)\uparrow(c\smile d) = [(b\frown d\frown\bar{b}\frown a)\uparrow(b\frown c)]\smile(b\frown d),$$

le second membre n'étant pas, en général, susceptible de réduction, à moins que l'on n'ait $d=b$, auquel cas

$$b\frown[(a\smile b)\uparrow(c\smile b)] = [b\frown(a\smile b)]\uparrow[b\frown(c\smile b)] = a\uparrow c,$$

et par suite

(43) $$(a\smile b)\uparrow(c\smile b) = (a\uparrow c)\smile b,$$

ce qui est d'ailleurs une conséquence du principe distributif, puisque cela revient à

$$(\bar{b}\frown a)\uparrow(\bar{b}\frown c) = \bar{b}\frown(a\uparrow c) = (a\uparrow c)\smile b;$$

ou bien encore à moins que l'opération $\frown$ ne soit commutative; alors on a

(44) $$(a\smile b)\uparrow(c\smile d) = [(a\frown d)\uparrow(c\frown b)]\smile(b\frown d).$$

388. Si l'opération $\frown$ n'est pas commutative, on a

(45) $$(a\smile b)\frown(c\smile d) = \bar{b}\frown a\frown\bar{d}\frown c,$$

ce qui se réduit, dans le cas de la commutativité, à

(46) $$(a\smile b)\frown(c\smile d) = (a\frown c)\smile(b\frown d).$$

389. En changeant les signes ↑ et ⌒ respectivement en + et ×, on obtiendra les formules qui expriment les règles de la multiplication et de la division, avec ou sans commutativité.

Ainsi, dans le cas de non-commutativité, on a

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{b.d.\frac{1}{b}.a + bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{1}{b}.a.\frac{1}{d}.c.$$

Dans le cas de la commutativité, on retrouve les formules connues.

CHAPITRE II.

DES QUANTITÉS COMPLEXES EN GÉNÉRAL.

---

§ I[er].

Propriétés générales.

390. Soient $i_1, i_2, i_3, \ldots$ diverses quantités constantes, irréductibles entre elles et avec l'unité qui sert à former les quantités numériques ou *réelles*. Appelons ces quantités des *unités imaginaires*, par analogie avec la dénomination adoptée jusqu'ici pour désigner la quantité $i = \sqrt{-1}$.

Nous supposerons chaque unité imaginaire i_k susceptible d'addition avec elle-même, et par suite aussi de multiplication et de division par un nombre quelconque entier, fractionnaire ou incommensurable, positif ou négatif [1].

Nous admettrons que l'addition d'une unité imaginaire avec elle-même et ses multiples jouisse des mêmes propriétés que l'addition arithmétique, et il en sera de même, par conséquent, de la multiplication ou de la division par des quantités réelles. Ainsi l'addition et la multiplication par un facteur réel sont des opérations uniformes et associatives. L'addition est commutative; la multiplication l'est en ce sens que nous poserons, par définition, a étant une quantité *réelle*,

$$i_k \times a = a \times i_k ;$$

---

[1] On pourrait même, en vue de certaines recherches algébriques, considérer la multiplication d'une unité imaginaire i_k par une quantité complexe ordinaire, de la forme $\alpha + \beta i$. Mais cette extension n'étant d'aucun usage dans les applications que nous nous proposons de traiter, nous nous contenterons de la mentionner ici.

de sorte que nous représenterons le produit indifféremment par $i_k a$ ou par $a i_k$. La multiplication par un facteur réel est distributive pour les polynômes formés avec une même unité. Enfin la multiplication jouit des propriétés exprimées par les équations

$$a \times 0 = 0 \times a = 0, \qquad a \times 1 = 1 \times a = a.$$

D'après cela, on aura, par exemple,

$$i_k . a = a . i_k, \qquad i_k . 0 = 0 . i_k = 0,$$
$$i_k . (a + b) = (a + b) . i_k = a i_k + b i_k,$$

a et b étant des quantités réelles.

391. Supposons maintenant qu'avec différentes unités imaginaires $i_1, i_2, \ldots$ on ait formé des monômes à coefficients réels $a_1 i_1, a_2 i_2, \ldots$. Appelons *addition* une opération exécutée sur ces monômes, et jouissant de toutes les propriétés essentielles de l'addition arithmétique, c'est-à-dire une opération uniforme, associative, commutative, et satisfaisant à la condition $a + 0 = 0 + a = a$. La manière dont cette opération s'effectuera dépendra de la nature des unités imaginaires.

392. Cela posé, nous appellerons *quantité complexe* toute expression linéaire par rapport à des unités imaginaires, et de la forme

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots,$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots$ étant des quantités réelles.

Nous supposerons que l'opération qui relie les divers termes de la quantité complexe et que nous appellerons *addition* est commutative comme l'addition ordinaire.

Si les unités imaginaires *distinctes* $i_1, i_2, \ldots$, sont au nombre de n, nous dirons que la quantité complexe est *de la $n^{\text{ième}}$ classe*. Une quantité complexe ordinaire est ainsi de la première classe.

393. Dans une quantité complexe, nous supposerons toujours

les unités imaginaires *distinctes* entre elles; c'est-à-dire que ces unités ne devront satisfaire à aucune relation linéaire à coefficients réels, de la forme

$$(1) \qquad \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \ldots + \alpha_n i_n = 0,$$

où les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ne seraient pas *tous nuls séparément*.

De cette hypothèse il résulte que, toutes les fois qu'un calcul, fait sur des unités imaginaires distinctes, conduira à une équation de la forme (1), cette équation se décomposera nécessairement dans les $n+1$ équations

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_n = 0.$$

394. Telles sont les propriétés que nous supposerons d'abord exister chez les quantités complexes dont nous nous occuperons. L'établissement même de ces propriétés dépend des considérations spéciales qui donnent naissance à ces quantités, et nous les démontrerons en même temps que nous étudierons la représentation des objets concrets à l'aide des symboles complexes.

395. En suivant la marche tracée dans les raisonnements généraux du Chapitre précédent, on parvient sans peine à établir les formules suivantes.

Désignons, pour abréger, par $\sum a_k i_k$ (i_0 représentant l'unité numérique) la quantité complexe

$$a_0 + a_1 i_1 + \ldots + a_n i_n.$$

De la commutativité de l'addition des termes d'une quantité complexe et de la distributivité de la multiplication d'une même unité par des facteurs réels résulte la formule

$$(2) \qquad \sum a_k i_k + \sum b_k i_k = \sum (a_k + b_k) i_k.$$

De $a_k + b_k = b_k + a_k$ on tire

$$(3) \qquad \sum a_k i_k + \sum b_k i_k = \sum b_k i_k + \sum a_k i_k.$$

L'addition de deux quantités complexes, formées avec les mêmes unités, est donc commutative.

On verra de même que cette addition est associative, c'est-à-dire que l'on a

$$(4)\quad \left(\sum a_k i_k + \sum b_k i_k\right) + \sum c_k i_k = \sum a_k i_k + \left(\sum b_k i_k + \sum c_k i_k\right).$$

L'égalité $\sum a_k i_k = \sum b_k i_k$ pouvant s'écrire

$$\sum (a_k - b_k) i_k = 0,$$

on en conclut [393] $a_k - b_k = 0$ pour toutes les valeurs de l'indice k. Donc deux quantités complexes, dont les unités sont toutes *distinctes*, ne peuvent être égales qu'autant que les coefficients des mêmes unités sont égaux de part et d'autre.

396. Soit une quantité complexe

$$(5)\qquad j = a_0 + a_1 i_1 + \ldots + a_n i_n.$$

On pourra remplacer dans le calcul une quelconque i_1 des unités complexes par cette quantité j. On a, en effet, le coefficient a_1 étant supposé différent de zéro,

$$i_1 = \frac{1}{a_1} j - \frac{a_0}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} i_2 - \ldots - \frac{a_n}{a_1} i_n,$$

relation qui exprime i_1 en fonction des n unités

$$j, i_2, \ldots, i_n.$$

De plus, ces nouvelles unités sont distinctes; car s'il existait entre elles une relation linéaire de la forme

$$\alpha_0 + \alpha_1 j + \alpha_2 i_2 + \ldots + \alpha_n i_n = 0,$$

en y mettant pour j sa valeur (5), cette relation se changerait en une relation linéaire entre les anciennes unités $i_1, i_2, \ldots, i_n$, qui ne seraient plus distinctes entre elles, comme nous les supposons.

Il s'ensuit de là que, si $j_1, j_2, \ldots, j_n$ sont des fonctions linéaires de $i_1, i_2, \ldots, i_n$, telles que

$$j_1 = a'_0 + a'_1 i_1 + \ldots + a'_n i_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$j_n = a^{(n)}_0 + a^{(n)}_1 i_1 + \ldots + a^{(n)}_n i_n,$$

et dont le déterminant

$$|\, a'_1 a''_2 \ldots a^{(n)}_n \,|$$

ne soit pas nul, ces n fonctions j_i pourront être considérées comme de nouvelles unités imaginaires, distinctes entre elles et pouvant remplacer les unités primitives i_k.

397. On entend par ***produit*** de deux quantités complexes

$$\text{A} = a_0 + a_1 i_1 + \ldots + a_n i_n = \sum a_k i_k,$$
$$\text{B} = b_0 + b_1 i_1 + \ldots + b_n i_n = \sum b_l i_l,$$

formées avec le même système d'unités imaginaires, l'expression

$$\text{AB} = \sum a_k i_k . \sum b_l i_l = \sum a_k b_l i_k i_l, \quad (k, l = 0, 1, \ldots, n),$$

formée d'après le principe distributif de la multiplication des polynômes [25] et suivant les règles de la multiplication ordinaire des monômes, si ce n'est en ce qui concerne la multiplication des unités imaginaires entre elles, laquelle n'est pas généralement commutative. Ainsi il n'est pas permis d'y réduire ensemble les termes en $i_k\, i_l$ et ceux en $i_l\, i_k$.

Le sens que l'on attache à un produit de deux unités imaginaires $i_k\, i_l$ peut varier à l'infini. C'est la définition spéciale d'un tel produit qui forme le caractère propre de telle ou telle espèce de multiplication des quantités complexes. Nous verrons des exemples de la manière dont une telle définition peut s'établir.

398. Nous supposerons seulement, dans ce qui va suivre,

que la multiplication des unités soit une opération associative, c'est-à-dire que l'on ait

$$(i_k i_l) i_m = i_k (i_l i_m).$$

On conclut de là que

$$\begin{aligned}\left(\sum a_k i_k . \sum b_l i_l\right) . \sum c_m i_m &= \sum a_k b_l i_k i_l . \sum c_m i_m \\ &= \sum a_k b_l c_m (i_k i_l) i_m = \sum a_k b_l c_m i_k (i_l i_m) \\ &= \sum a_k i_k . \sum b_l c_m i_l i_m = \sum a_k i_k . \left(\sum b_l i_l . \sum c_m i_m\right).\end{aligned}$$

La multiplication de plusieurs quantités complexes est donc associative, dès que celle des unités imaginaires jouit de cette propriété.

De plus,

$$\begin{aligned}\left(\sum a_k i_k + \sum b_k i_k\right) . \sum c_m i_m &= \sum (a_k + b_k) i_k . \sum c_m i_m \\ &= \sum (a_k + b_k) c_m i_k i_m = \sum a_k c_m i_k i_m + \sum b_k c_m i_k i_m \\ &= \sum a_k i_k . \sum c_m i_m + \sum b_k i_k . \sum c_m i_m .\end{aligned}$$

Donc la multiplication des quantités complexes est distributive par rapport à son premier facteur. On prouverait de même qu'elle est distributive par rapport à son second facteur, et par suite qu'elle est *complètement distributive* (art. 385).

399. De la définition de la multiplication résulte son uniformité. Mais nous verrons que cette uniformité n'est pas toujours *réciproque*, et qu'un produit peut, dans certains cas, rester invariable, lorsqu'*un seul* de ses facteurs varie. Par conséquent, l'opération inverse de la multiplication, c'est-à-dire la division, peut quelquefois être indéterminée.

400. Un produit de deux quantités complexes se présente immédiatement sous la forme d'un polynôme du second degré par rapport aux unités imaginaires, et par conséquent sous la forme d'une quantité complexe d'un *degré* supérieur au premier. Si l'on conservait le produit sous cette forme, il

faudrait regarder les carrés et les produits des unités imaginaires primitives comme de nouvelles unités, que l'on pourrait appeler unités imaginaires *du second degré*. De même, un produit de trois facteurs amènerait des unités *du troisième degré*, et ainsi de suite.

Dans la théorie des quaternions, nous n'aurons pas l'occasion d'employer de système de cette nature, et nous ferons seulement usage de quantités complexes formant un système *limité*, dans lequel les carrés et les produits deux à deux des unités primitives seront exprimables par des fonctions linéaires de ces mêmes unités. On conclura de là sans peine qu'il en sera de même des puissances et des produits quelconques de ces unités, et par suite des puissances et des produits quelconques des quantités complexes qui en sont formées.

401. Dans les calculs où il n'entre qu'une seule unité imaginaire, combinée avec des quantités réelles, la multiplication est commutative, et se fait exactement par les mêmes règles que celle des quantités réelles.

402. Soit maintenant un système d'unités imaginaires $i_1, i_2, \ldots, i_n$, au nombre de n, et supposons que le produit de deux quelconques de ces unités soit de la forme

$$i_k i_l = f_0 + f_1 i_1 + \ldots + f_n i_n.$$

En considérant les produits de l'une des unités i_1 par les $n-1$ autres, on devra donc avoir $n-1$ équations de la forme

$$\begin{aligned} i_1 i_2 &= b_0 + b_1 i_1 + \ldots + b_n i_n, \\ i_1 i_3 &= c_0 + c_1 i_1 + \ldots + c_n i_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ i_1 i_n &= h_0 + h_1 i_1 + \ldots + h_n i_n, \end{aligned}$$

que l'on peut écrire ainsi

$$\begin{aligned} (b_2 - i_1) i_2 + b_3 i_3 + \ldots + b_n i_n &= -b_0 - b_1 i_1, \\ c_2 i_2 + (c_3 - i_1) i_3 + \ldots + c_n i_n &= -c_0 - c_1 i_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_2 i_2 + h_3 i_3 + \ldots + (h_n - i_1) i_n &= -h_0 - h_1 i_1. \end{aligned}$$

En ajoutant ces équations, multipliées respectivement par les déterminants mineurs correspondants à la $(k-1)^{\text{ième}}$ ligne verticale du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_2 - i_1 & b_3 & \dots & b_n \\ c_2 & c_3 - i_1 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_2 & h_3 & \dots & h_n - i_1 \end{vmatrix},$$

considérés comme *premiers facteurs*, il viendra

$$\Delta i_k = -(b_0 + b_1 i_1)\frac{\partial \Delta}{\partial b_k} - \dots - (h_0 + h_1 i_1)\frac{\partial \Delta}{\partial h_k}.$$

Le carré i_1^2 étant supposé exprimé, comme les autres produits, par une fonction linéaire des n unités,

$$i_1^2 = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \dots + a_n i_n,$$

substituons les valeurs précédentes de

$$\Delta i_2, \Delta i_3, \dots, \Delta i_n$$

dans l'expression

$$\Delta i_1^2 = a_0 \Delta + a_1 \Delta i_1 + a_2 \Delta i_2 + \dots + a_n \Delta i_n.$$

On obtiendra une équation algébrique entre i_1 et des quantités réelles [1], et cette équation sera du degré $n+1$ par rapport à i_1, le coefficient de la plus haute puissance étant l'unité. Or, si l'on désigne par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ les racines de cette équation, lesquelles sont des quantités complexes ordinaires, l'équation pourra s'écrire identiquement sous la forme

$$(i_1 - \alpha_1)(i_1 - \alpha_2) \dots (i_1 - \alpha_{n+1}) = 0.$$

On conclut de là que, si l'on admet qu'un produit ne puisse s'évanouir qu'autant qu'un de ses facteurs s'annule, l'unité imaginaire i_1 devra être une des racines d'une équation algé-

[1] Ou des quantités complexes ordinaires, si l'on admet l'extension indiquée dans la Note de l'art. 390.

brique, et par conséquent une quantité de la forme $p+q\sqrt{-1}$, absolument comme l'unité imaginaire des quantités complexes ordinaires.

403. Il devra en être de même pour les autres unités $i_2, \ldots, i_n$; de sorte que, si l'on désigne par $j_1, j_2, \ldots, j_n$ des quantités assujetties à avoir pour carré -1, mais pouvant représenter des objets de nature quelconque, et restant toujours irréductibles les unes aux autres par voie d'addition, on pourra poser

$$\begin{aligned} i_1 &= p_1 + q_1 j_1, \\ i_2 &= p_2 + q_2 j_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ i_n &= p_n + q_n j_n. \end{aligned}$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'expression d'une quantité complexe quelconque

$$a_0 + a_1 i_1 + \ldots + a_n i_n,$$

cette expression prendra la forme

$$b_0 + b_1 j_1 + \ldots + b_n j_n,$$

et par conséquent une quantité complexe peut toujours être représentée au moyen d'unités imaginaires dont chacune a pour carré -1.

Ainsi nous supposerons, dans tout ce qui va suivre, que les unités imaginaires sont choisies de manière que leur carré soit l'unité négative.

404. Ces conclusions devraient être modifiées, si l'on admettait dans les calculs l'introduction de l'unité imaginaire ordinaire i, concurremment avec l'unité imaginaire i_1, en la considérant comme irréductible avec elle. Alors le théorème fondamental de la théorie des équations algébriques n'aurait plus lieu, et un produit pourrait s'annuler sans qu'aucun de ses facteurs devînt égal à zéro.

Considérons, par exemple, l'équation

$$z^2 + 1 = 0,$$

et, pour la résoudre, posons

$$z = x + y i_1 .$$

L'équation deviendra

$$x^2 - y^2 + 2 i_1 x y + 1 = 0,$$

et elle sera satisfaite si on la partage dans les deux équations

$$x^2 - y^2 + 1 = 0, \qquad xy = 0,$$

qui donnent les systèmes de solutions

$$\begin{array}{lllll} x = & +i, & -i, & 0, & 0, \\ y = & 0, & 0, & +1, & -1, \end{array}$$

et par suite, si i_1 est considéré comme irréductible avec i, l'équation $z^2 + 1 = 0$ admettra les quatre solutions

$$z = +i, \quad -i, \quad +i_1, \quad -i_1 .$$

De cette manière le premier membre $z^2 + 1$, qui est identiquement égal à

$$(z + i)(z - i),$$

pourra s'annuler sans qu'aucun des facteurs $z + i$, $z - i$ s'annule.

Si l'on opère donc simultanément avec plusieurs unités imaginaires irréductibles entre elles, une équation algébrique pourra admettre plus de racines qu'il n'y a d'unités dans son degré.

§ II.

Des nombres alternés.

405. Pour donner un exemple du calcul d'un système de quantités complexes, prenons celui qui a été proposé pour la première fois par M. H. Grassmann en 1844, et que Cauchy a traité depuis sous le nom de *Clefs algébriques*.

Dans ce système, la multiplication des unités imaginaires est soumise aux règles suivantes :

1° Le produit de deux unités change de signe quand on intervertit l'ordre des facteurs,

$$i_k i_l = - i_l i_k ;$$

d'où il résulte que

2° Le produit d'une unité par elle-même est nul,

$$i_k i_k = 0 .$$

Ces règles étant posées, on a, pour le produit de deux quantités complexes quelconques

$$\text{A} = \sum a_k i_k , \quad \text{B} = \sum b_l i_l ,$$

$$\text{AB} = \sum \begin{vmatrix} a_k & a_l \\ b_k & b_l \end{vmatrix} i_k i_l ,$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\text{BA} = \sum \begin{vmatrix} b_k & b_l \\ a_k & a_l \end{vmatrix} i_k i_l = - \text{AB} .$$

Donc, dans ce système, le produit de deux quantités complexes change de signe lorsqu'on intervertit l'ordre des facteurs; d'où il résulte que le produit d'une quantité complexe par elle-même s'annule,

$$\text{A} . \text{A} = 0 .$$

On voit là un exemple d'un système dans lequel l'annulation d'un produit n'entraîne pas celle de l'un des facteurs.

406. Si l'on compare la règle de l'alternance des signes dans la multiplication avec la règle qui sert à fixer le signe d'un terme d'un déterminant, on voit que, dans les deux cas, si l'on part d'un terme où tous les facteurs soient rangés dans leur ordre naturel, et que l'on considère ce terme comme ayant le signe $+$, par exemple, le signe d'un produit formé par une disposition quelconque des mêmes facteurs sera, dans les deux cas, celui de -1 élevé à une puissance égale au

nombre des *dérangements* que présentent les facteurs pris deux à deux. Ainsi, la disposition BDEAC présentant les 5 dérangements BA, DA, DC, EA, EC, on aura

$$\text{BDEAC} = (-1)^5 \text{ABCDE}.$$

407. Il résulte de là que, si les quantités complexes A, B, ... représentent des rayons ou lignes droites *dirigées* dans le plan ou dans l'espace (*voir* le Chapitre suivant), le produit de deux rayons $OA = \text{A}$, $AB = \text{B}$ représentera, en grandeur et en position, l'aire du parallélogramme construit sur OA et AB, c'est-à-dire le produit OA.AB sin OAB. Le produit de trois rayons $OA = \text{A}$, $OB = \text{B}$, $OC = \text{C}$ est, en grandeur et en position, le volume du parallélipipède construit sur ces trois rayons.

En effet, soit

$$\text{A} = a_1 i_1 + a_2 i_2, \qquad \text{B} = b_1 i_1 + b_2 i_2;$$

on aura, par ce qui précède,

$$\text{AB} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} i_1 i_2.$$

De même, si l'on fait

$$\begin{aligned} \text{A} &= a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3, \\ \text{B} &= b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3, \\ \text{C} &= c_1 i_1 + c_2 i_2 + c_3 i_3, \end{aligned}$$

on aura

$$\text{ABC} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} i_1 i_2 i_3.$$

Or on sait que les multiplicateurs de $i_1 i_2$ et de $i_1 i_2 i_3$ sont les valeurs numériques de l'aire et du volume en question.

408. Dans ce système, la division est indéterminée. On a, en effet, n étant un nombre réel quelconque,

$$\text{AX} = \text{A}(\text{X} + n\text{A}),$$

puisque $\text{A}^2 = 0$. Si donc on pose

$$\text{AX} = \text{B},$$

et que $\frac{B}{A}$ soit une des solutions de cette équation, la valeur générale du quotient sera

$$x = \frac{B}{A} + nA,$$

ou encore

$$x \equiv \frac{B}{A}, \text{ mod. } A.$$

409. *Décomposition des déterminants en facteurs.*

Le produit des facteurs

$$(a'_1 i_1 + a'_2 i_2 + \ldots + a'_n i_n) \ldots (a^{(n)}_1 i_1 + a^{(n)}_2 i_2 + \ldots + a^{(n)}_n i_n)$$
$$= \sum a'_k a''_l \ldots a^{(n)}_m . i_k i_l \ldots i_m,$$
$$(k, l, \ldots, m = 1, 2, \ldots, n),$$

où les indices k, l, ..., m doivent être permutés de toutes les manières possibles, les produits contenant deux indices égaux disparaissant, peut s'écrire, en désignant par $[kl \ldots m]$ le facteur ± 1, suivant que le nombre des dérangements de la suite $k, l, \ldots, m$ est pair ou impair,

$$= i_1 i_2 \ldots i_n \sum [kl \ldots m] a'_k a''_l \ldots a^{(n)}_m$$

$$= i_1 i_2 \ldots i_n \begin{vmatrix} a'_1 & a''_1 & \ldots & a^{(n)}_1 \\ a'_2 & a''_2 & \ldots & a^{(n)}_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_n & a''_n & \ldots & a^{(n)}_n \end{vmatrix}.$$

Ainsi un déterminant quelconque peut se décomposer en un produit de facteurs complexes.

410. Si l'on considère le produit

$$(a'_1 i_1 + \ldots + a'_n i_n) \ldots (a^{(p)}_1 i_1 + \ldots + a^{(p)}_n i_n)$$
$$= \sum a'_k a''_l \ldots a^{(p)}_m . i_k i_l \ldots i_m,$$
$$(k, l, \ldots, m = 1, 2, \ldots n),$$

et que p soit $> n$, les p nombres k, l, ..., m, dont les valeurs doivent être prises dans la suite 1, 2, ..., n, ne pourront pas être tous inégaux entre eux. Donc le produit $i_k i_l \ldots i_m$ s'annu-

lera toujours, et par suite aussi le produit des facteurs complexes.

Pour $p=n$, on a la formule relative aux déterminants.

Pour $p<n$, on pourra partager les termes de la somme $\sum a'_k \ldots a^{(p)}_m . i_k \ldots i_m$ en sommes partielles correspondantes aux diverses combinaisons possibles de n nombres p à p. Chacune de ces sommes partielles formera un déterminant. Donc le produit des p facteurs complexes sera la somme, multipliée par $i_1 i_2 \ldots i_n$, de tous les déterminants que l'on peut former avec les éléments du tableau

$$\begin{array}{c} a'_1 , a''_1 , \ldots , a^{(p)}_1 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_n , a''_n , \ldots , a^{(p)}_n , \end{array}$$

en prenant les lignes horizontales p à p de toutes les manières possibles, c'est-à-dire que

$$(a'_1 i_1 + \ldots + a'_n i_n) \ldots (a^{(p)}_1 i_1 + \ldots + a^{(p)}_n i_n)$$
$$= \sum | a'_{k_1} a''_{k_2} \ldots a^{(p)}_{k_p} | . i_{k_1} i_{k_2} \ldots i_{k_p} ,$$
$$(k_1 , k_2 , \ldots , k_p = 1 , 2 , \ldots , n).$$

Multipliant cette équation par

$$(a^{(p+1)}_1 i_1 + \ldots + a^{(p+1)}_n i_n) \ldots (a^{(n)}_1 i_1 + \ldots + a^{(n)}_n i_n)$$
$$= \sum | a^{(p+1)}_{k_{p+1}} a^{(p+2)}_{k_{p+2}} \ldots a^{(n)}_{k_n} | . i_{k_{p+1}} i_{k_{p+2}} \ldots i_{k_n} ,$$

on aura le théorème de Laplace

$$|a'_1 a''_2 \ldots a^{(n)}_n| = \sum [k_1 k_2 \ldots k_n] . |a'_{k_1} a''_{k_2} \ldots a^{(p)}_{k_p}| . |a^{(p+1)}_{k_{p+1}} a^{(p+1)}_{k_{p+1}} \ldots a^{(n)}_{k_n}| .$$

411. On a de même les autres théorèmes fondamentaux de la théorie des déterminants. Soit

$$\begin{array}{c} \mathrm{A}' = a'_1 i_1 + \ldots + a'_n i_n , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{A}^{(n)} = a^{(n)}_1 i_1 + \ldots + a^{(n)}_n i_n . \end{array}$$

On a

$$A'A''\dots A^{(n)} = |a'_1 a''_2 \dots a^{(n)}_n| . i_1 i_2 \dots i_n .$$

Si de même

$$B' = \sum b'_k A^{(k)} , \dots , B^{(n)} = \sum b^{(n)}_k A^{(k)} .$$

on aura

$$B'B''\dots B^{(n)} = |b'_1 b''_2 \dots b^{(n)}_n| . A' \dots A^{(n)} ,$$

et par suite

$$B'B''\dots B^{(n)} = |b'_1 b''_2 \dots b^{(n)}_n| . |a'_1 a''_2 \dots a^{(n)}_n| . i_1 i_2 \dots i_n .$$

Or si la substitution des A dans les B donne

$$B' = \sum c'_k i_k , \dots , B^{(n)} = \sum c^{(n)}_k i_k ,$$

où, en général,

$$c^{(l)}_k = b^{(l)}_1 a'_k + b^{(l)}_2 a''_k + \dots + b^{(l)}_n a^{(n)}_k ,$$

on en conclura

$$B'B''\dots B^{(n)} = |c'_1 c''_2 \dots c^{(n)}_n| . i_1 i_2 \dots i_n ,$$

d'où l'on tire le théorème de la multiplication des déterminants,

$$|c'_1 c''_2 \dots c^{(n)}_n| = |a'_1 a''_2 \dots a^{(n)}_n| . |b'_1 b''_2 \dots b^{(n)}_n| .$$

412. Soient les équations linéaires

$$\sum a^{(k)}_1 x_k = B' , \dots , \sum a^{(k)}_n x_k = B^{(n)} .$$

Multiplions-les respectivement par $i_1, \dots, i_n$, et ajoutons. On a alors, en posant

$$A' = \sum a'_l i_l , \quad \dots , \quad A^{(n)} = \sum a^{(n)}_l i_l , \quad B = \sum B^{(l)} i_l ,$$

l'équation

$$\sum A^{(k)} x_k = B .$$

Multipliant les deux membres par $A'' \dots A^{(n)}$, il ne reste dans le premier membre que le terme en x_1, d'où

$$x_1 A' A'' A''' \dots A^{(n)} = B A'' A''' \dots A^{(n)} ,$$

c'est-à-dire

$$x_1 . | a'_1 a''_2 \dots a^{(n)}_n | = | B a'_2 a''_3 \dots a^{(n)}_n | .$$

413. Nous renvoyons, pour plus de détails sur cette étude, aux ouvrages de Grassmann (1) et aux Mémoires de Saint-Venant (2) et de Cauchy (3).

---

(1) *Die Wissenschaft der extensiven Grössen*; 1844.

Geometrische Analyse, geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik; 1847.

Ausdehnungslehre; 1862.

(2) *Comptes rendus*, t. XXI, p. 620; 1845.

(3) *Comptes rendus*, t, XXXVI, p. 70, 129, 161; 1853.

CHAPITRE III.

TRANSLATIONS; ADDITION DES VECTEURS.

---

§ Ier.

Définitions et principes généraux.

414. Soient O un point fixe de l'espace, pris pour origine, et A un autre point quelconque. Ce point sera déterminé lorsque la droite OA, qui va de l'origine O à ce point, sera donnée ***en grandeur et en direction.***

Nous appellerons cette droite, suivant laquelle nous concevons que s'effectue le ***transport*** de O en A, le ***rayon vecteur,*** ou simplement le ***vecteur*** du point A.

Cette translation de O en A peut s'effectuer en déplaçant parallèlement à lui-même un système solide quelconque, lié au point mobile, le déplacement ayant lieu de manière que chaque point du système décrive une droite égale et parallèle à OA.

Nous dirons, dans ce cas, que tous les points du système subissent des translations égales à OA. En d'autres termes, nous dirons que deux translations qui font décrire à deux points des droites ***égales et parallèles,*** sont ***égales*** entre elles.

Si donc nous considérons les ***droites dirigées*** ou ***vecteurs*** comme représentant des ***translations*** d'un système quelconque, nous dirons que ***deux vecteurs sont égaux, lorsqu'ils sont de même longueur, parallèles et dirigés dans le même sens*** (art. 39).

415. Si l'on fait glisser le système parallèlement à lui-même le long d'une droite AB, puis le long d'une autre droite BC, tous les points du système décriront deux côtés de parallélo-

grammes égaux, et parviendront en même temps aux extrémités des diagonales de ces parallélogrammes. Or, toutes ces diagonales, étant égales et parallèles, formeront des vecteurs égaux.

Le résultat de ces deux translations successives est donc, pour un point quelconque, le même que celui de la translation unique et déterminée AC. On voit donc que la combinaison $AB \frown BC$ de deux translations est une opération ***uniforme***.

De plus, si ***un seul*** des vecteurs AB, BC varie, AC variera. Donc l'opération est ***complètement uniforme*** (art. 372).

416. Si, au lieu de faire décrire au point A les côtés AB, BC du parallélogramme ABCD, on lui avait fait décrire les deux autres côtés AD, DC, on aurait encore obtenu pour résultat la même translation AC. Or, puisque l'on a $AD = BC$ et $DC = AB$ en grandeur et en direction, la première combinaison de translations étant représentée par $AB \frown BC$, la seconde pourra l'être par $BC \frown AB$. Donc, on a

$$AB \frown BC = AC = BC \frown AB,$$

c'est-à-dire que l'opération est ***commutative.***

417. Faisons maintenant parcourir au point mobile les trois arêtes contiguës d'un parallélipipède ABCDEFGH, savoir, AB, BF, FG. On a évidemment

$$AB \frown BF = AF, \qquad AF \frown FG = AG;$$
$$BF \frown FG = BG, \qquad AB \frown BG = AG.$$

Donc

$$(AB \frown BF) \frown FG = AB \frown (BF \frown FG).$$

L'opération est donc ***associative.***

Enfin, si l'un des vecteurs AB, BC s'annule, le résultat $AB \frown BC$ se réduit à l'autre vecteur.

Donc cette opération de la combinaison des translations possède toutes les propriétés essentielles de l'addition ordi-

naire (art. 353). De plus, elle se réduit à cette addition dans le cas particulier où les vecteurs sont situés en ligne droite.

On peut donc, d'accord avec le principe de permanence, appeler ***addition des vecteurs*** cette combinaison des translations.

418. Nous aurons, d'après cela, quels que soient les points A, B, C,

$$AB + BC = AC. \tag{1}$$

De même, pour un nombre quelconque de points dans l'espace A, B, C, D, ..., K, L, on aura

$$AB + BC + CD + \ldots + KL = AL.$$

Ainsi, le vecteur qui ferme un polygone quelconque, dont les côtés sont des vecteurs, est égal à la somme de tous les autres côtés.

Si le polygone se ferme de lui-même, la somme de tous ses côtés est nulle, et réciproquement.

419. L'addition des vecteurs étant une opération complètement uniforme, la soustraction est une opération déterminée (art. 372). Elle sera définie par l'une ou l'autre des deux équations

$$AB = AC - BC, \tag{2}$$

$$BC = AC - AB, \tag{3}$$

qui sont équivalentes à cause de la commutativité de l'addition.

Si le point C coïncide avec A, AC devient $AA = 0 =$ le ***module*** de l'addition (art. 377). On a ainsi $AB + BA = 0$, d'où

$$BA = -AB, \tag{4}$$

$-AB$ étant la quantité ***réciproque*** de AB [1]

---

[1] Les vecteurs AB, CD, ... se comportent dans ces formules comme le feraient les différences B—A, D—C, ..., si A, B, C, ... représentaient des quantités. C'est ce que l'on exprime symboliquement en assimilant le vecteur AB à la ***différence des points*** A ***et*** B, prise en retranchant le premier du second.

A l'aide de l'équation (4), on pourra toujours remplacer la soustraction d'un vecteur AB par l'addition de son réciproque BA, de sorte que, au lieu de AC—AB, on pourra écrire AC+BA.

420. Si l'on ajoute deux vecteurs situés en ligne droite, la somme sera un vecteur situé sur la même droite, et dont la longueur sera la somme ou la différence des longueurs des deux premiers, selon que ceux-ci seront de même sens ou de sens contraire.

Si l'on ajoute un nombre n de vecteurs égaux en grandeur et en direction, la somme sera le *produit* de l'un de ces vecteurs par n, et ce produit sera un vecteur de même direction et de longueur n fois plus grande.

Du cas de n entier, on passe, par le raisonnement connu, au cas de n fractionnaire ou incommensurable.

421. D'après cela, AB étant un vecteur quelconque, $n.\mathrm{AB}$ représentera un vecteur de même sens ou de sens contraire, selon que n sera positif ou négatif. Ainsi, *une relation entre deux vecteurs* AB, CD, *de la forme*

$$\mathrm{AB} + n.\mathrm{CD} = 0,$$

où n est un nombre RÉEL, *exprime que les droites* AB *et* CD *sont parallèles.*

On a évidemment

$$n.\mathrm{AB} = -\,n.\mathrm{BA}.$$

422. On conclut de là cette proposition importante :

S'il existe entre deux vecteurs AB, CD *une relation de la forme*

$$m.\mathrm{AB} + n.\mathrm{CD} = 0 \tag{5}$$

(*m et n étant* RÉELS), *sans que* AB *et* CD *soient parallèles ni nuls, il faudra nécessairement que les coefficients m et n soient nuls séparément, de sorte que l'équation se décomposera dans les deux suivantes,*

$$m = 0, \qquad n = 0.$$

Pareillement, *si, entre trois vecteurs* AB, CD, EF, *non parallèles à un même plan, il existe une relation à coefficients réels* l, m, n, *de la forme*

$$(6) \qquad l.\mathrm{AB} + m.\mathrm{CD} + n.\mathrm{EF} = 0,$$

sans qu'aucun de ces vecteurs soit nul, l'équation se décomposera en trois autres,

$$l = 0, \qquad m = 0, \qquad n = 0.$$

Car la somme de deux termes du premier membre de (6) est un vecteur situé dans un plan parallèle à ces deux termes, et par suite ne peut être égal et opposé au troisième terme.

423. En vertu de la définition de l'addition, un vecteur quelconque A est égal à la somme de ses projections sur trois axes rectangulaires quelconques $\mathrm{O}\mathrm{I}_1$, $\mathrm{O}\mathrm{I}_2$, $\mathrm{O}\mathrm{I}_3$.

Désignons par $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3$ des unités de longueur portées sur ces trois axes, dans le sens positif, à partir de l'origine. Tout vecteur porté sur $\mathrm{O}\mathrm{I}_1$, par exemple, pourra être représenté par le produit de I_1 multiplié par un facteur numérique, positif ou négatif, suivant que cette longueur devra être portée dans le sens positif $\mathrm{O}\mathrm{I}_1$ ou dans le sens opposé, et dont la valeur numérique exprimera la longueur absolue de ce vecteur.

Par conséquent, les trois composantes ou projections de A sur les trois axes pourront s'exprimer respectivement par

$$a_1\mathrm{I}_1, \qquad a_2\mathrm{I}_2, \qquad a_3\mathrm{I}_3,$$

a_1, a_2, a_3 étant les projections algébriques de A sur les axes. On aura ainsi

$$(7) \qquad \mathrm{A} = a_1\mathrm{I}_1 + a_2\mathrm{I}_2 + a_3\mathrm{I}_3.$$

424. Les trois vecteurs $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3$ n'étant pas parallèles à un même plan, il ne pourra, d'après ce que nous avons vu dans l'art 422, exister entre eux aucune relation à coefficients réels, de la forme

$$a_1\mathrm{I}_1 + a_2\mathrm{I}_2 + a_3\mathrm{I}_3 = 0,$$

à moins que chacun des coefficients a_1, a_2, a_3 ne s'annule séparément. Donc ces unités I_1, I_2, I_3 sont *irréductibles* entre elles (art. 393) au moyen de l'addition telle que nous l'avons définie.

Un vecteur ainsi décomposé se présente donc sous la forme d'une quantité complexe à trois unités imaginaires irréductibles.

425. Il s'ensuit de là que l'on peut appliquer aux vecteurs, mis sous la forme (7), les formules que nous avons établies pour les quantités complexes en général.

Par exemple, si l'on a deux vecteurs

$$\begin{aligned} A &= a_1 I_1 + a_2 I_2 + a_3 I_3, \\ B &= b_1 I_1 + b_2 I_2 + b_3 I_3, \end{aligned}$$

leur somme pourra se mettre sous la forme

$$A + B = (a_1 + b_1) I_1 + (a_2 + b_2) I_2 + (a_3 + b_3) I_3.$$

426. Deux vecteurs A, B seront parallèles, si l'on a, entre leurs composantes, les relations

$$a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3.$$

Ils seront perpendiculaires, si l'on a

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0.$$

En général, ils formeront un angle dont le cosinus sera

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\mathfrak{T}A . \mathfrak{T}B},$$

en désignant par $\mathfrak{T}A, \mathfrak{T}B$, *comme nous le ferons toujours dans la suite,* les *longueurs* ou *modules* [1] de ces vecteurs, c'est-à-dire les expressions

$$\mathfrak{T}A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \qquad \mathfrak{T}B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

---

[1] *Tensors*, suivant la dénomination employée par Hamilton.

427. Si l'on représente par $OA = \text{A}$ un vecteur constant, et par t un facteur numérique variable, l'équation

$$(8) \qquad OM = t.OA, \quad \text{ou} \quad \text{x} = \text{A}t$$

représentera le vecteur d'un point quelconque de la ligne OA, considérée comme prolongée indéfiniment dans les deux sens. Ce sera donc l'***équation de cette droite.***

Il est clair que cette équation n'est pas altérée, si l'on prend pour variable, au lieu de t, le produit kt de t par un facteur réel k, ce qui revient au même que si l'on avait multiplié par k le coefficient complexe A. Donc, ***l'équation d'une droite passant par l'origine n'est pas altérée, lorsqu'on multiplie le coefficient angulaire*** A ***par une constante réelle quelconque.*** (*Voir* art. 425).

428. Si l'on ajoute au vecteur OM, déterminé par l'équation (8), un vecteur constant $OB = MN = \text{B}$, l'équation

$$(9) \qquad ON = \text{x} = \text{A}t + \text{B}$$

représentera une droite parallèle à la droite (8), et passant par l'extrémité B du vecteur OB.

429. Si l'on veut exprimer les vecteurs constants A et B au moyen de leurs composantes rectangulaires, l'équation d'une droite quelconque passant par le point B prendra la forme

$$(10) \qquad \text{x} = (a_1 t + b_1)\text{I}_1 + (a_2 t + b_2)\text{I}_2 + (a_3 t + b_3)\text{I}_3 .$$

Ainsi le vecteur d'un point variable d'une droite est représenté par une expression de la forme

$$\text{x} = x_1 \text{I}_1 + x_2 \text{I}_2 + x_3 \text{I}_3 ,$$

linéaire et homogène par rapport aux unités imaginaires $\text{I}_1, \text{I}_2, \text{I}_3$, et dont les coefficients x_1, x_2, x_3 sont des fonctions réelles et du premier degré d'une variable réelle t.

430. x étant le vecteur d'une droite, et λ, L des constantes, dont la première soit un nombre réel, la seconde un vecteur quelconque,

$$\text{x}' = \lambda \text{x} + \text{L}$$

sera l'équation d'une droite, cette expression étant toujours réductible à la forme (10); et, de plus, cette droite sera parallèle à la droite qui a pour vecteur X.

431. Considérons maintenant l'équation

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}t + \mathrm{B}u + \mathrm{C}, \tag{11}$$

$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ étant trois vecteurs constants, et t, u deux variables indépendantes réelles. Pour $u =$ const., l'équation représentera une droite parallèle à la droite $\mathrm{X} = \mathrm{A}t + \mathrm{C}$. En faisant varier u, on aura une série de parallèles à la même droite, et, en faisant partout $t = 0$, on voit que toutes ces parallèles rencontreront la droite $\mathrm{X} = \mathrm{B}u + \mathrm{C}$. Donc le lieu de ces parallèles, représenté par l'équation (11), est un plan passant par le point C, et parallèle aux deux vecteurs A et B.

En remplaçant les vecteurs $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ par leurs composantes rectangulaires, on voit que le vecteur d'un plan est une fonction linéaire complexe de deux variables indépendantes réelles, et s'exprime sous la forme

$$\mathrm{X} = (a_1 t + b_1 u + c_1)\mathrm{I}_1 + (a_2 t + b_2 u + c_2)\mathrm{I}_2 + (a_3 t + b_3 u + c_3)\mathrm{I}_3. \tag{12}$$

D'après cela, toute équation de la forme

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \ldots,$$

où $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots$ sont des vecteurs constants, et $\alpha, \beta, \ldots$ des fonctions linéaires réelles, représentera une droite ou un plan, suivant que $\alpha, \beta, \ldots$ dépendront d'une ou de deux indéterminées.

432. L'équation d'une droite passant par deux points donnés A, B est de la forme

$$\mathrm{X} = \mathrm{A} + (\mathrm{B} - \mathrm{A})t, \tag{13}$$

ou, ce qui revient au même, en changeant t en $1 - t$, de la forme

$$\mathrm{X} = (\mathrm{A} - \mathrm{B})t + \mathrm{B}. \tag{14}$$

L'équation (13) peut s'écrire

$$\text{X} + (t-1)\text{A} - t\text{B} = 0,$$

ou, en multipliant par un facteur indéterminé, et désignant par p, q, r les trois coefficients obtenus, dont la somme est nulle,

(15) $$p\text{A} + q\text{B} + r\text{X} = 0,$$

avec la condition

(16) $$p + q + r = 0.$$

Donc, *en égalant à zéro une fonction linéaire et homogène de trois vecteurs, dont les coefficients réels ont une somme nulle, on exprime que les extrémités des trois vecteurs sont en ligne droite.*

De même, l'équation du plan qui contient les extrémités de trois vecteurs A, B, C peut s'écrire sous la forme

(17) $$\text{X} = \text{A} + (\text{B}-\text{A})t + (\text{C}-\text{A})u,$$

ou

(18) $$p\text{A} + q\text{B} + r\text{C} + s\text{X} = 0,$$

p, q, r, s étant tels que

(19) $$p + q + r + s = 0;$$

en sorte que les relations (18) et (19) expriment que les extrémités des quatre vecteurs A, B, C, X sont dans un même plan.

§ II.

Applications.

433. Étant donnés trois points A, B, C, le point B sera le milieu de la droite qui joint les deux autres, si l'on a

$$\text{AB} = \text{BC}, \quad \text{ou} \quad \text{OB} - \text{OA} = \text{OC} - \text{OB},$$

et, par suite,

$$\text{OB} = \frac{\text{OA} + \text{OC}}{2}.$$

434. Si A, B, C, D sont les sommets d'un parallélogramme, on aura $AB = DC$, ou, O étant le point de concours des diagonales,

$$OB - OA = OC - OD,$$

d'où

$$AO - OC = BO - OD.$$

$AO - OC$ et $BO - OD$ étant des segments pris respectivement sur les deux diagonales, c'est-à-dire sur deux droites non parallèles, il s'ensuit (art. 422) que l'égalité précédente ne peut subsister que si l'on a séparément

$$AO - OD = 0, \qquad BO - OD = 0.$$

donc le point de concours des diagonales est le le milieu de chacune d'elles.

435. *Si la somme de trois vecteurs est nulle, on peut construire un triangle dont les côtés soient égaux et parallèles à ces vecteurs.*

Soient, par exemple, AA', BB', CC' les trois médianes d'un triangle ABC. On a

$$\begin{aligned} BA' &= A'C = \tfrac{1}{2}BC, & AA' &= AB + BA', \\ CB' &= B'A = \tfrac{1}{2}CA, & BB' &= BC + CB', \\ AC' &= C'B = \tfrac{1}{2}AB, & CC' &= CA + AC', \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} AA' + BB' + CC' &= (AB + BC + CA) + (BA' + CB' + AC') \\ &= \tfrac{3}{2}(AB + BC + CA) = 0. \end{aligned}$$

Donc avec les trois médianes d'un triangle, transportées parallèlement à elles-mêmes, on peut construire un autre triangle.

436. Soient maintenant A', B', C' trois points divisant proportionnellement les trois côtés d'un triangle, de manière que l'on ait

$$BA' = n.BC, \qquad CB' = n.CA, \qquad AC' = n.AB.$$

En opérant comme dans l'article précédent, on trouvera

$$AA' + BB' + CC' = (1 + n)(BC + CA + AB) = 0.$$

Donc les trois droites AA′, BB′, CC′ sont égales et parallèles aux trois côtés d'un triangle, ce qui est une généralisation de la propriété des médianes.

Cherchons le point de rencontre G de BB′ et de CC′. Posons, pour cela,

$$BG = u.BB', \qquad CG = v.CC',$$

u et v étant deux inconnues réelles. On a

$$BB' = BA + AB' = BA + (n-1)CA,$$
$$CC' = CA + AC' = CA + n.AB,$$

d'où

$$BG = BA + AG = u[BA + (n-1)CA],$$
$$CG = CA + AG = v(CA + n.AB).$$

Éliminant AG entre ces deux équations, il vient

$$BA - CA = u[BA + (n-1)CA] - v(CA - n.BA).$$

Nous sommes ainsi parvenus, en exprimant toutes les lignes au moyen de BA et de CA, à obtenir une équation linéaire et homogène entre deux vecteurs non parallèles, équation qui, d'après l'art. 422, se décompose en deux autres,

$$1 = u + nv, \qquad -1 = (n-1)u - v,$$

d'où

$$u = \frac{1-n}{1-n+n^2}, \qquad v = \frac{n}{1-n+n^2}.$$

Pour $n = \frac{1}{2}$, $u = v = \frac{2}{3}$, d'où l'on conclut aisément que les trois médianes concourent en un même point.

Réciproquement, pour que les trois droites AA′, BB′, CC′ concourent en un même point, il faut que, en appelant G′ le point de concours de CC′ et de AA′, et faisant

$$CG' = v'.CC', \qquad AG' = w.AA',$$

d'où

$$v' = \frac{1-n}{1-n+n^2}, \qquad w = \frac{n}{1-n+n^2},$$

la valeur de v' soit égale à celle de v trouvée précédemment, ce qui exige que l'on ait $1-n=n$, ou $n=\frac{1}{2}$.

437. Si A représente un point de masse m, les moments de ce point par rapport aux trois plans $O\text{I}_2\text{I}_3, O\text{I}_3\text{I}_1, O\text{I}_1\text{I}_2$ seront ma_1, ma_2, ma_3. Les sommes des moments de plusieurs points A, A', ..., de masses $m, m', \ldots$, par rapport aux mêmes plans, savoir $\sum ma_1, \sum ma_2, \sum ma_3$, seront les composantes du vecteur

$$\sum m\text{A} = \text{I}_1 \sum ma_1 + \text{I}_2 \sum ma_2 + \text{I}_3 \sum ma_3.$$

En égalant ces sommes de moments à $A_1\sum m, A_2\sum m, A_3\sum m$, on voit que le vecteur du centre de gravité A sera déterminé par l'équation

$$A = \frac{\sum m\text{A}}{\sum m}.$$

Dans le cas de n points de masses égales, A deviendra le centre des moyennes distances,

$$A = \frac{\sum \text{A}}{n}.$$

438. Le centre de gravité de l'aire d'un triangle homogène est situé au point de concours G des médianes. Or, nous avons vu (art 436) que

$$\text{AG} = \tfrac{2}{3}\text{AA}', \quad \text{BG} = \tfrac{2}{3}\text{BB}', \quad \text{CG} = \tfrac{2}{3}\text{CC}',$$

d'où l'on tire

$$\text{AG} + \text{BG} + \text{CG} = \tfrac{2}{3}(\text{AA}' + \text{BB}' + \text{CC}') = 0,$$

ou, O étant une origine quelconque,

$$\text{OG} - \text{OA} + \text{OG} - \text{OB} + \text{OG} - \text{OC} = 0,$$
$$\text{OG} = \tfrac{1}{3}(\text{OA} + \text{OB} + \text{OC}).$$

G coïncide donc avec le centre des moyennes distances des trois sommets.

439. Considérons actuellement le tétraèdre DABC. Le centre de gravité se trouve sur chacune des droites qui joignent deux sommets D, A aux centres de gravité G, G_1 des deux faces respectivement opposées ABC, BCD, droites qui se coupent évidemment, puisqu'elles sont situées l'une et l'autre dans le plan qui passe par les deux sommets et par le milieu I de l'arête opposée BC. Soit H le point de concours des droites DG, AG_1, et posons

$$DH = u.DG, \qquad AH = v.AG_1.$$

Nous avons AH = AD + DH. D'ailleurs

$$2DI = DB + DC, \qquad 2AI = AB + AC,$$
$$DG = \tfrac{1}{3}(DA + DB + DC) = \tfrac{1}{3}(DA + 2DI),$$
$$AG_1 = \tfrac{1}{3}(AD + AB + AC) = \tfrac{1}{3}(AD + 2AI) = \tfrac{1}{3}(3AD + 2DI);$$

donc

$$DH = u.\tfrac{1}{3}(DA + 2DI), \qquad AD + DH = v.\tfrac{1}{3}(2DI - 3DA),$$

d'où, en éliminant DH,

$$DA = u.\tfrac{1}{3}(DA + 2DI) + v.\tfrac{1}{3}(3DA - 2DI),$$

et, par la règle de l'art. 422,

$$1 = \tfrac{1}{3}u + v, \qquad 0 = \tfrac{2}{3}u - \tfrac{2}{3}v,$$

ce qui donne $u = v = \frac{3}{4}$.

On a maintenant, O étant une origine quelconque,

$$OH = OA + AH = OB + BH = OC + CH = OD + DH,$$

d'où

$$4OH = OA + OB + OC + OD + AH + BH + CH + DH.$$

Or, $AH = \frac{3}{4}AG_1 = \frac{1}{4}(AB + AC + AD)$, etc., d'où, en faisant la somme,

$$AH + BH + CH + DH = 0.$$

Donc

$$OH = \tfrac{1}{4}(OA + OB + OC + OD),$$

et partant le centre de gravité d'un tétraèdre est le centre des moyennes distances des quatre sommets.

440. Si deux triangles ABC, A'B'C' ont leurs sommets situés deux à deux sur des droites AA', BB', CC', concourant en un même point O, les points de concours des côtés correspondants BC et B'C', CA et C'A', AB et A'B' seront en ligne droite.

En effet, désignons, pour abréger, par $\text{A}, \text{B}, \ldots$ les vecteurs OA, OB, ... (art. 419, note), de sorte que le vecteur AB, par exemple, sera représenté par $\text{B} - \text{A}$. Si nous désignons par $\alpha, \beta, \ldots$ des coefficients réels, et par $\text{D}, \text{E}, \text{F}$ les trois points de concours en question, on aura d'abord

$$\text{A}' = \alpha\text{A}, \quad \text{B}' = \beta\text{B}, \quad \text{C}' = \gamma\text{C}.$$

Ensuite, D étant à la fois sur BC et sur B'C',

$$\text{D} - \text{B} = \delta(\text{C} - \text{B}), \quad \text{D} - \text{B}' = \delta'(\text{C}' - \text{B}') = \delta'(\gamma\text{C} - \beta\text{B}),$$

d'où, en éliminant D,

$$(1 - \delta)\text{B} + \delta\text{C} = (1 - \delta')\beta\text{B} + \delta'\gamma\text{C},$$

et, par la règle de l'art. 422,

$$1 - \delta = \beta(1 - \delta'), \quad \delta = \gamma\delta',$$

ce qui donne

$$\delta' = \frac{1 - \beta}{\gamma - \beta}, \quad \delta = \gamma . \frac{1 - \beta}{\gamma - \beta}.$$

La valeur de D devient alors

$$\text{D} = \frac{1 - \beta}{\gamma - \beta} . \text{C}' - \frac{1 - \gamma}{\gamma - \beta}\text{B}'.$$

En formant par des permutations de lettres les deux expressions analogues pour les autres points de rencontre, on obtiendra ainsi les trois relations

$$(\gamma - \beta)\text{D} = (1 - \beta)\text{C}' - (1 - \gamma)\text{B}',$$
$$(\alpha - \gamma)\text{E} = (1 - \gamma)\text{A}' - (1 - \alpha)\text{C}',$$
$$(\beta - \alpha)\text{F} = (1 - \beta)\text{B}' - (1 - \beta)\text{A}',$$

d'où l'on tire

$$(1-\alpha)(\gamma-\beta)\,\mathrm{D}+(1-\beta)(\alpha-\gamma)\,\mathrm{E}+(1-\gamma)(\beta-\alpha)=0.$$

On a d'ailleurs identiquement

$$(1-\alpha)(\gamma-\beta)+(1-\beta)(\alpha-\gamma)+(1-\gamma)(\beta-\alpha)=0.$$

Donc (art. 432) les trois points D, E, F sont en ligne droite.

On pourrait encore le voir en calculant le vecteur $\mathrm{DE}=\mathrm{E}-\mathrm{D}$, ce qui donne

$$\frac{(\gamma-\beta)(\alpha-\gamma)}{1-\gamma}\,.\,\mathrm{DE}=(\gamma-\beta)\,\mathrm{A}'+(\alpha-\gamma)\,\mathrm{B}'+(\beta-\alpha)\,\mathrm{C}'.$$

Le second membre, ne changeant pas par la permutation cyclique des lettres, représente aussi la valeur de $\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\alpha)}{1-\alpha}\mathrm{EF}$; donc les deux vecteurs DE, EF, ayant un rapport réel, sont en ligne droite.

CHAPITRE IV.

DES BIRADIALES EN GÉNÉRAL.

---

441. Pour passer d'un point M de la droite OM à un autre point N de la même droite, il faut multiplier OM par un nombre qui exprime le rapport des longueurs OM, ON, ce nombre $\frac{ON}{OM}$ étant pris positivement ou négativement, suivant que le vecteur ON sera de même sens que OM ou de sens contraire. On aura ainsi

$$(1) \qquad ON = OM \times \frac{ON}{OM},$$

en supposant les signes + ou — incorporés dans les notations OM, ON, qui représentent les deux vecteurs.

442. Supposons maintenant que les deux vecteurs OM, ON ne soient pas en ligne droite. Alors le passage du point M au point N exigera une double opération :

1° Il faudra multiplier la longueur absolue de OM, que nous désignerons par $\mathfrak{T}OM$, par le rapport $\frac{\mathfrak{T}ON}{\mathfrak{T}OM}$ de la longueur de ON à celle de OM.

2° Il faudra faire tourner la direction du vecteur OM dans le plan OMN, de l'angle MON que font entre elles les deux directions.

Nous considérerons ces deux opérations comme ne formant qu'une seule opération composée, à laquelle nous donnerons le nom de *biradiale*. Provisoirement, nous désignerons cette bira-

diale par la notation MON; ou encore, en représentant par a le *module* $\frac{\mathfrak{T}ON}{\mathfrak{T}OM}$ ou $\mathfrak{T}$MON de la biradiale, et par α son *argument*, c'est-à-dire l'angle MON, considéré à la fois *en grandeur et en position* (¹), nous dénoterons la biradiale par le symbole

$$a_{\alpha},$$

dont nous avons déjà fait usage dans la théorie des quantités complexes ordinaires.

443. On voit que, si l'angle MON était nul, cette double opération se réduirait à la simple multiplication par le rapport $\frac{\mathfrak{T}ON}{\mathfrak{T}OM}$, dans lequel se changerait la biradiale MON. On satisfera donc au principe de permanence en donnant à la double opération représentée par une biradiale quelconque le nom de *multiplication par cette biradiale*, et nous justifierons cette dénomination par l'examen des propriétés des biradiales. Nous aurons ainsi, par définition,

$$\text{(2)} \qquad ON = OM \times MON.$$

Par la même raison, nous pourrons considérer la biradiale MON, par laquelle il faut multiplier OM pour obtenir ON, comme étant le *rapport* des vecteurs OM, ON, considérés *en grandeur et en direction*, et nous poserons, comme définition,

$$\text{(3)} \qquad MON = \frac{ON}{OM}.$$

444. Les deux parties dont se compose la double opération peuvent être exécutées séparément et dans un ordre quelconque. En effet, au lieu de commencer par multiplier OM par le rapport des longueurs

$$\frac{\mathfrak{T}ON}{\mathfrak{T}OM} = a,$$

pour le faire ensuite tourner de l'angle $MON = \alpha$, ce qui

(¹) C'est-à-dire comme ayant une *grandeur* et un *sens déterminés* dans un *plan déterminé*.

revient à multiplier le résultat $OM \times a = OM'$ par la biradiale $M'ON$, de module $\frac{\mathfrak{C}ON}{\mathfrak{C}OM'} = 1$ et d'argument α, et que nous représenterons, d'après le système de notation adopté, par le symbole 1_α; on peut commencer par faire tourner OM de l'angle MON, ou le multiplier par 1_α, puis multiplier le résultat $OM \times 1_\alpha = ON'$ par le module a, de sorte que l'on a les égalités

(4) $$OM \times a_\alpha = (OM \times a) \times 1_\alpha = (OM \times 1_\alpha) \times a.$$

Le facteur 1_α, dont l'effet consiste en un changement de direction sans changement de longueur, s'appelle une *biradiale unitaire* ou un *verseur*.

Un verseur se réduit à l'unité, quand son argument devient nul, c'est-à-dire que l'on a

(5) $$1_0 = 1.$$

445. Si l'on définit l'opération a_α, dont l'effet équivaut aux multiplications successives par a et par 1_α, comme étant le *produit* de ces deux symboles a et 1_α, c'est-à-dire si l'on pose

(6) $$a_\alpha = a \times 1_\alpha,$$

l'égalité

(7) $$OM \times (a \times 1_\alpha) = (OM \times a) \times 1_\alpha = OM \times a \times 1_\alpha$$

prendra la forme associative.

De plus, des égalités (4) il résulte que l'on devra poser, pour être conséquent avec la définition d'un produit,

(8) $$a \times 1_\alpha = 1_\alpha \times a,$$

pour que ces égalités subsistent encore pour $OM = 1$. La multiplication d'un nombre par un verseur est donc commutative.

Observons encore que, si l'un des facteurs, OM ou a, s'annule, le produit s'annule; si l'un des facteurs $OM, a, 1_\alpha$ se réduit à l'unité, le résultat se réduit au produit des deux autres facteurs.

Ainsi la nouvelle opération possède les propriétés les plus

essentielles de la multiplication ordinaire, ce qui justifie le nom de ***multiplication*** que nous lui avons donné.

446. Ces propriétés subsistent encore, quand on multiplie un même vecteur consécutivement par plusieurs biradiales. Les multiplications successives que subira la longueur du vecteur par le fait des modules des biradiales pourront se combiner d'une manière quelconque entre elles et avec les multiplications par les verseurs. On pourra, par exemple, multiplier le vecteur par le produit de tous les modules, dans lequel les facteurs pourront être intervertis comme on voudra, puis multiplier le résultat successivement par chacun des verseurs, en observant seulement que, dans cette dernière opération, il n'est pas permis d'altérer l'ordre des facteurs (art. 507); ou bien on pourra multiplier d'abord par les verseurs, puis par les modules, etc.

447. Il résulte de là une conséquence importante : c'est que l'on peut isoler les deux éléments d'une biradiale, en traitant séparément la multiplication par le module, laquelle rentre dans les règles ordinaires de l'Algèbre, et la multiplication par le verseur, laquelle exige une étude spéciale. Nous pourrons ainsi, si nous le jugeons convenable, supposer d'abord le module égal à l'unité, le rétablissement de la valeur quelconque du module donné pouvant se faire facilement à la fin de l'opération.

448. Si l'on considère le vecteur mobile qui passe de la direction OM à la direction ON comme appartenant à un système solide, ce passage pourra s'effectuer en faisant tourner de l'angle α, autour de O, le plan qui passe par OM et ON; ou, si l'on veut, en faisant tourner le système de l'angle α autour d'un axe λ, perpendiculaire au plan MON. Dans ce mouvement, tout vecteur OP, situé dans le plan MON (ou dans un plan parallèle), décrira aussi un angle $POQ = \alpha$. Les deux verseurs correspondants aux angles MON et POQ devront être

considérés comme égaux, puisque la multiplication par chacun d'eux produit sur le système une rotation identique. En associant ces deux verseurs avec le même module, on aura ainsi deux biradiales identiques quant à leurs effets.

Nous dirons donc que deux biradiales sont *égales*, lorsqu'elles sont *coplanaires*, c'est-à-dire situées dans un même plan (ou dans des plans parallèles), et qu'elles ont des modules égaux et des arguments égaux et de même sens.

Ainsi deux biradiales MON, POQ seront dites égales, lorsque les deux triangles MON, POQ, qu'elles déterminent, seront situés dans un même plan (ou dans des plans parallèles), et qu'ils seront *directement* semblables.

On peut donc toujours supposer le premier rayon OM d'une biradiale MON égal à l'unité, et représenter ainsi une biradiale par un triangle situé dans le plan donné, et ayant pour côtés l'unité et le module, et pour angle compris entre ces côtés l'argument.

La multiplication d'un vecteur OP par la biradiale 1ON consistera donc à construire, sur OP homologue à O1, un triangle OPQ directement semblable à O1N; OQ sera le produit cherché.

449. Si l'on fait passer un vecteur variable (de grandeur et de position) de l'état OM à l'état ON en le multipliant par la biradiale MON, puis de l'état ON à l'état OP en multipliant le produit ON par la biradiale NOP, il est clair que l'on aurait pu parvenir directement au même résultat final OP, en multipliant OM par la biradiale unique MOP.

Cette biradiale MOP, qui peut remplacer à elle seule l'effet combiné des biradiales MON et NOP, est dite le produit de ces deux biradiales. Nous justifierons cette dénomination, à laquelle nous a conduits l'application du principe de permanence, en montrant que la combinaison des opérations indiquées par les biradiales MON, NOP jouit des propriétés essentielles de la multiplication ordinaire, à l'exception de la

propriété commutative, qui n'a plus lieu lorsque les deux biradiales sont situées dans des plans différents.

On aura donc, par définition, quels que soient les vecteurs, OM, ON, OP,

$$\text{MON} \times \text{NOP} = \text{MOP}, \tag{9}$$

ou, si l'on représente (art. 443) chaque biradiale sous la forme d'un rapport de deux vecteurs,

$$\frac{\text{ON}}{\text{OM}} \times \frac{\text{OP}}{\text{ON}} = \frac{\text{OP}}{\text{OM}}, \tag{10}$$

formule qui satisfait évidemment à la loi de permanence.

450. Deux biradiales qui ont, comme MON et NOP, un vecteur ON commun, sont dites *collinéaires*. Nous venons de voir que, dans ce cas, la multiplication se fait immédiatement.

Si l'on propose de multiplier entre elles deux biradiales non collinéaires MON, POQ, on commencera par les transformer en deux biradiales collinéaires. Pour cela, soit OR l'intersection des deux plans de ces biradiales; on fera tourner celles-ci autour de O, dans leurs plans respectifs, jusqu'à ce que le rayon final ON de la *première* et le rayon *initial* OP de la *seconde* viennent se placer tous les deux dans la direction OR. Soient M'ON', P'OQ' les nouvelles positions des biradiales; on multipliera les deux vecteurs de l'une d'elles, de la seconde, par exemple, par un nombre k tel que $\text{OP}' \times k$ devienne égal à ON' (il suffira pour cela de mener N'Q' parallèle à P'Q'); on aura alors deux biradiales collinéaires M'ON', N'OQ', dont le produit sera M'OQ'.

451. On appelle biradiales *conjuguées* deux biradiales *coplanaires* dont les modules sont égaux, et les arguments égaux et de signe contraire. Ainsi les deux biradiales MON, M'ON' seront conjuguées, si elles sont situées dans le même plan (ou dans des plans parallèles), et que les rapports de leurs vecteurs $\frac{\text{ON}}{\text{OM}}, \frac{\text{ON}'}{\text{OM}'}$ soient égaux, tandis que les arguments MON, M'ON'

sont de même grandeur, mais dirigés en sens contraire. En d'autres termes, deux biradiales sont conjuguées, lorsque les triangles qu'elles déterminent sont situés dans le même plan (ou dans des plans parallèles) et *inversement* semblables.

Nous désignerons les conjuguées d'une biradiale MON$=A$ par les mêmes lettres surmontées d'un trait horizontal, ou, suivant les cas, par le signe $\mathfrak{C}$, abrégé de *conjugué*. Ainsi nous écrirons

$$\mathfrak{C}\,\mathrm{MON} = \mathfrak{C}A = \overline{\mathrm{MON}} = \bar{A}.$$

452. Si l'on opère sur un vecteur quelconque par la biradiale MON, et sur le produit, par la biradiale conjugée $\overline{\mathrm{MON}}$, les effets des deux rotations égales et de sens contraire se détruiront, et le vecteur sera ainsi ramené sur sa première direction, tandis que sa longueur aura été multipliée deux fois par le module.

Donc, conformément à la définition du produit de deux biradiales, nous dirons que *le produit d'une biradiale A par sa conjuguée $\bar{A}$ est égal au carré du module commun* $\mathfrak{T}A$, de sorte que

$$A.\bar{A} = \bar{A}.A = (\mathfrak{T}A)^2. \tag{11}$$

Si la biradiale A est unitaire et se réduit à son verseur 1_α, la biradiale conjuguée sera $\bar{1}_\alpha = 1_{-\alpha}$, et le produit de la biradiale par sa conjuguée,

$$1_\alpha.\bar{1}_\alpha = 1_\alpha.1_{-\alpha} = 1,$$

sera égal à l'unité absolue.

453. Si l'on a une relation quelconque entre des biradiales coplanaires, qui forment une certaine figure dans le plan, et que l'on construise la figure symétrique de celle-là par rapport à un axe quelconque tracé dans le plan, tous les éléments étant les mêmes de part et d'autre, la relation devra subsister. Or, dans le passage de la première figure à sa symétrique, chaque biradiale se change dans sa conjuguée. On a donc ce principe important, qu'une relation entre des biradiales copla-

naires continue à subsister, lorsqu'on y remplace toutes les biradiales par leurs conjuguées.

Nous verrons que le même principe subsiste également pour les biradiales quelconques.

454. Pour étudier les questions qui dépendent de la multiplication des biradiales, nous considérerons à part le cas où les biradiales sont toutes coplanaires, et celui où elles sont situées dans des plans différents.

Le premier cas a déjà été traité, principalement au point de vue algébrique, dans la PREMIÈRE PARTIE de cet Ouvrage. Nous le reprendrons ici à un point de vue différent, celui de l'établissement d'une méthode analytique pour la solution des problèmes de Géométrie plane, comme introduction à l'application des biradiales quelconques à la Géométrie des trois dimensions.

CHAPITRE V.

DES BIRADIALES COPLANAIRES OU QUANTITÉS COMPLEXES ORDINAIRES. APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

---

§ Ier.

Principes généraux.

455. Une biradiale située dans un plan donné peut être déplacée dans ce plan [448] de manière que son rayon initial vienne coïncider avec un axe fixe $0x$, tracé dans ce plan, et à partir duquel on compte les angles, et que, de plus, la longueur de ce rayon soit réduite à l'unité de longueur 01. On pourra donc toujours représenter une biradiale de ce plan par 10A, 0A étant un vecteur dont la longueur représente le module de la biradiale, et faisant avec $0x$ un angle égal à l'argument de cette biradiale.

Dès lors, la biradiale 10A sera complètement déterminée par le vecteur 0A, et pourra être représentée par ce vecteur. Nous dirons, dans ce sens, *multiplier par le vecteur* 0A, pour signifier la multiplication par la biradiale 10A. Telle est la définition de la multiplication des deux vecteurs situés dans un même plan que l'origine $0x$ des angles.

En conséquence, multiplier un vecteur 0M par la biradiale 10A ou par le vecteur 0A (en supposant tout situé dans le même plan) revient à construire sur 0M, homologue à 01, un triangle 0MN directement semblable à 01A, et le produit sera représenté par le vecteur 0N ou par la biradiale 10N.

456. En se rappelant ce qui a été dit dans la PREMIÈRE PARTIE

(art. 58 et suiv.), on voit que la multiplication de deux biradiales coplanaires, ou de deux vecteurs situés dans un plan passant par la droite, origine des angles, est une opération jouissant des propriétés suivantes :

1° Elle est uniforme;

2° Elle est associative;

3° Elle est commutative;

4° Elle est distributive [1];

5° Elle satisfait à la relation $a \frown 0 = 0 \frown a = 0$;

6° et à la relation $a \frown 1 = 1 \frown a = a$.

Donc cette opération, possédant toutes les propriétés de la multiplication des quantités réelles, doit être soumise absolument aux mêmes règles.

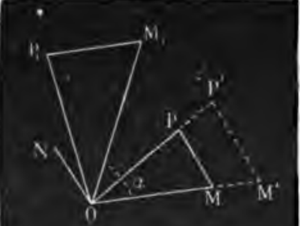
457. Le produit de deux biradiales coplanaires ou de deux vecteurs a donc pour module le produit des modules, et pour

---

[1] A la démonstration que nous avons donnée de cette proposition (art. 61), il est plus simple de substituer la suivante :

Soit $OM + ON = OM + MP = OP$ (*fig.* 62), la somme de deux vecteurs. Si l'on multiplie ces trois lignes par le module a du multiplicateur, on aura le triangle $OM'P'$, semblable à OMP, et dans lequel

Fig. 62.



$$OP' = OM' + M'P',$$

c'est-à-dire

$$OP \times a = OM \times a + MP \times a,$$

ce qui montre d'abord que la multiplication est distributive dans le cas d'un multiplicateur réel.

En faisant maintenant tourner un côté OM' du triangle $OM'P'$ de l'angle α de la biradiale multiplicateur, les deux autres côtés tourneront aussi chacun du même angle α. Donc chacune des lignes $OM, ON = MP, OP$ aura été, en vertu de cette double opération, multipliée par la biradiale a_α, et par conséquent l'égalité $OP_1 = OM_1 + M_1P_1$ pourra s'écrire

$$OP \times a_\alpha = (OM + ON) \times a_\alpha = OM \times a_\alpha + ON \times a_\alpha,$$

c'est-à-dire que l'opération est distributive relativement au multiplicande. Comme elle est, en outre, commutative, on en conclut (art. 365) qu'elle est complètement distributive.

argument la somme des arguments des deux facteurs. Ce résultat montre immédiatement que l'opération est associative et commutative.

458. On conclut de là les règles données (art. 59, 60) pour la division et l'élévation aux puissances entières des biradiales ou des vecteurs.

459. Toutes ces opérations sont uniformes, bien que l'argument d'une biradiale donnée soit toujours susceptible d'une infinité de valeurs différentes, la biradiale ne changeant pas quand on augmente son argument d'un multiple quelconque de 2π. On peut en dire autant de toutes les opérations qui conduisent à des expressions rationnelles par rapport aux biradiales.

Mais il n'en est plus de même des opérations dans lesquelles il entre des expressions fractionnaires des arguments, telles que les extractions de racines. Nous avons vu que, dans ce cas, on a des valeurs multiformes (art. 68).

460. Si l'on projette un vecteur a sur deux axes rectangulaires, sur l'un desquels les longueurs sont mesurées avec l'unité réelle, tandis qu'elles sont mesurées sur l'autre au moyen de l'unité *imaginaire* i, ou du vecteur unitaire perpendiculaire à l'axe Ox, ce vecteur prendra la forme $a_0 + a_1 i$, et les opérations faites sur les vecteurs conduiront généralement, comme nous l'avons vu dans la PREMIÈRE PARTIE, à des expressions de cette même forme.

Ce vecteur unitaire perpendiculaire à Ox représente (art. 455), la *biradiale unitaire rectangle* ou le *verseur rectangle,* que nous avons désigné précédemment par $1_{\frac{\pi}{2}}$.

461. Le module du vecteur $a = a_0 + a_1 i$ étant désigné par a et son argument par α, le vecteur pourra se mettre sous la forme

$$a = \mathrm{a}_\alpha = \mathrm{a} \,.\, 1_\alpha = \mathrm{a}\,(\cos\alpha + i \sin\alpha),$$

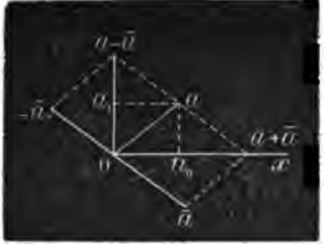
$\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ étant les projections du vecteur unitaire $\mathbf{1}_\alpha$ sur les deux axes rectangulaires.

En changeant α en $-\alpha$, ou, ce qui revient au même, i en $-i$, on a le vecteur conjugué

$$\bar{a} = \mathbf{a}_{-\alpha} = \mathbf{a}.\mathbf{1}_{-\alpha} = \mathbf{a}(\cos\alpha - i\sin\alpha) = a_0 - a_1 i.$$

On a immédiatement, entre deux vecteurs conjugués, les relations suivantes :

Fig. 63.



$$(1) \qquad \frac{a+\bar{a}}{2} = a_0 = \mathbf{a}\cos\alpha$$
$= $ la partie réelle,

$$(2) \qquad \frac{a-\bar{a}}{2} = a_1 i = i\mathbf{a}\sin\alpha$$
$= $ la partie imaginaire,

où l'on voit que $a+\bar{a}$ et $a-\bar{a}$ représentent deux vecteurs perpendiculaires entre eux;

$$(3) \qquad \sqrt{a.\bar{a}} = \mathbf{a},$$

$$(4) \qquad \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}} = \mathbf{1}_\alpha,$$

formules qui déterminent les composantes du vecteur, son module et son verseur.

462. Étant donnés deux vecteurs

$$a = \mathbf{a}_\alpha, \qquad b = \mathbf{b}_\beta,$$

dont les conjugués sont

$$\bar{a} = \mathbf{a}_{-\alpha}, \qquad \bar{b} = \mathbf{b}_{-\beta},$$

on aura

$$(5) \qquad \sqrt{a.b} = \sqrt{\mathbf{a}.\mathbf{b}}.\ \mathbf{1}_{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)},$$

expression d'un vecteur qui est la ***moyenne proportionnelle bissectrice*** des deux vecteurs proposés a, b.

On a, de plus,

$$(6) \qquad \sqrt{\frac{a}{\bar{a}} : \frac{b}{\bar{b}}} = 1_{\alpha-\beta},$$

pour l'expression du verseur de la biradiale formée par ces deux vecteurs.

§ II.

Applications à la Géométrie élémentaire.

463. Nous avons vu (art. 65) comment on établit, au moyen du théorème de Moivre, les formules fondamentales de la goniométrie.

Soient maintenant $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ les longueurs des côtés d'un triangle ABC; α, β, γ les angles extérieurs, suppléments des angles intérieurs A, B, C du triangle; on a entre ces angles la relation

$$(7) \qquad \alpha + \beta + \gamma = 2\pi.$$

Si l'on désigne par θ l'argument du côté c, ceux des côtés a, b seront respectivement

$$\theta + \beta, \quad \text{et} \quad \theta + \beta + \gamma = \theta + 2\pi - \alpha,$$

cette dernière valeur pouvant être remplacée par $\theta - \alpha$. La somme des trois vecteurs AB, BC, CA étant nulle, on a l'équation fondamentale de la trigonométrie plane

$$(8) \qquad \mathbf{c}_\theta + \mathbf{a}_{\theta+\beta} + \mathbf{b}_{\theta-\alpha} = 0.$$

En y faisant $\theta = 0$, il vient

$$\mathbf{c} + \mathbf{a}_\alpha + \mathbf{b}_{-\alpha} = 0,$$

d'où l'on tire (art. 51), par la séparation du réel et de l'imaginaire,

$$\mathbf{c} = -\mathbf{a}\cos\beta - \mathbf{b}\cos\alpha, \qquad \mathbf{a}\sin\beta - \mathbf{b}\sin\alpha = 0.$$

Si l'on fait $\theta = -\frac{1}{2}(\beta+\gamma) = -\pi + \frac{1}{2}\alpha$, il vient

$$-\mathbf{c}_{\frac{1}{2}\alpha} + \mathbf{a}_{\frac{1}{2}(\beta-\gamma)} - \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}\alpha} = 0,$$

d'où l'on tire les formules de Mollweide

$$\mathbf{a}\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) - (\mathbf{b}+\mathbf{c})\cos\tfrac{1}{2}\alpha = 0,$$
$$\mathbf{a}\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) + (\mathbf{b}-\mathbf{c})\sin\tfrac{1}{2}\alpha = 0,$$

que l'on ramènerait à la forme habituelle en remplaçant α, β, γ par $\pi - A, \pi - B, \pi - C$.

464. En désignant par Δ l'aire du triangle ABC, on a

$$2\Delta = \mathbf{b}.\mathbf{c}.\sin\alpha.$$

Si l'on représente maintenant par b, c les deux *vecteurs* AC, AB, rapportés à l'origine A, on a (art. 461)

$$\mathbf{b} = \sqrt{b.\bar{b}}, \quad \mathbf{c} = \sqrt{c.\bar{c}},$$

$$\text{verseur AC} = \sqrt{\frac{b}{\bar{b}}}, \quad \text{verseur AB} = \sqrt{\frac{c}{\bar{c}}};$$

d'où

$$\text{verseur BAC} = \frac{\text{verseur AC}}{\text{verseur AB}} = \sqrt{\frac{b}{\bar{b}}} : \sqrt{\frac{c}{\bar{c}}} = 1_A,$$

$$2i\sin A = 1_A - 1_{-A} = \sqrt{\frac{b}{\bar{b}} : \frac{c}{\bar{c}}} - \sqrt{\frac{\bar{b}}{b} : \frac{\bar{c}}{c}},$$

$$4i\Delta = \sqrt{b\bar{b}.c\bar{c}}\left(\sqrt{\frac{b}{\bar{b}} : \frac{c}{\bar{c}}} - \sqrt{\frac{\bar{b}}{b} : \frac{\bar{c}}{c}}\right) = b\bar{c} - c\bar{b} = \begin{vmatrix} b & \bar{b} \\ c & \bar{c} \end{vmatrix}.$$

Si A n'est plus pris pour origine, on remplacera b, c par $b-a, c-a$, et il viendra

$$4i\Delta = \begin{vmatrix} b-a, & c-a \\ \bar{b}-\bar{a}, & \bar{c}-\bar{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & \bar{a} \\ 1 & b & \bar{b} \\ 1 & c & \bar{c} \end{vmatrix},$$

pour l'expression de l'aire d'un triangle au moyen des vecteurs des trois sommets. En remplaçant a, b, c par $x_1 + y_1 i, x_2 + y_2 i,$

x_3+y_3i, on retrouvera facilement l'expression connue de l'aire du triangle au moyen des coordonnées rectangles de ses sommets.

Par exemple, si les valeurs des trois vecteurs sont

$$a=2-i,\quad b=-1+3i,\quad c=-1-2i,$$

on trouvera

$$4i\Delta=\begin{vmatrix}1, & 2-i\ , & 2+i\\ 1, & -1+3i, & -1-3i\\ 1, & -1-2i, & -1+2i\end{vmatrix}=-30i,$$

d'où $\Delta=-\frac{15}{2}$.

465. En supposant $\Delta=0$, on a la condition pour que trois points a, b, x soient en ligne droite, c'est-à-dire l'équation de la ligne droite menée par les deux points a, b,

$$\begin{vmatrix}1 & x & \bar{x}\\ 1 & a & \bar{a}\\ 1 & b & \bar{b}\end{vmatrix}=0.$$

On pourrait encore obtenir cette équation en éliminant t entre l'équation de la ligne droite (art. 432)

$$x+(t-1)a-tb=0,$$

et sa conjuguée

$$\bar{x}+(t-1)\bar{a}-t\bar{b}=0.$$

Nous allons encore donner quelques exemples de l'application de cette méthode, empruntés pour la plupart aux ouvrages de M. Bellavitis.

466. Soit une droite coupant en A′, B′, C′ les trois côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC. En prenant A pour origine, et désignant, pour abréger, par B, C, ... les vecteurs AB, AC, ..., soient p, q, r, t des indéterminées. Les conditions pour que les

groupes de points (A',B,C),(B',C,A),(C',A,B),(A',B',C') soient situés chacun en ligne droite s'exprimeront par les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} \text{A}' + (p-1)\text{B} - p\text{C} = 0, \\ \text{B}' = q\text{C}, \\ \text{C}' = r\text{B}, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \text{B}' + (t-1)\text{B}' - t\text{C}' = 0.$$

Cette dernière équation devient, en vertu des équations (1),

$$-(p-1)\text{B} + p\text{C} + q(t-1)\text{C} - rt\text{B} = 0,$$

équation qui exprime que la somme des deux vecteurs dirigés, l'un suivant AB, l'autre suivant AC, est nulle. Or, ***une somme de deux vecteurs de directions différentes ne peut s'annuler, que si chacun de ces vecteurs s'annule séparément.*** Donc l'équation précédente se partagera dans les deux suivantes,

$$p - 1 + rt = 0, \qquad p + q(t-1) = 0.$$

Éliminant t entre ces deux équations, il vient

$$(3)\qquad (p-1)q + pr - qr = 0,$$

équation de condition résultant de ce que les points A',B',C' sont en ligne droite.

Or on a

$$\begin{aligned} \text{AC}'.\text{BA}'.\text{CB}' &= \text{C}'.(\text{A}'-\text{B}).(\text{B}'-\text{C}) \\ &= r\text{B}.p(\text{C}-\text{B}).(q-1)\text{C} \\ &= p(q-1)r.\text{AB}.\text{CB}.\text{AC}, \\ \text{BC}'.\text{CA}'.\text{AB}' &= (\text{C}'-\text{B})(\text{A}'-\text{C}).\text{B}' \\ &= (r-1)\text{B}.(p-1)(\text{C}-\text{B}).q\text{C} \\ &= (p-1)q(r-1).\text{AB}.\text{BC}.\text{AC}. \end{aligned}$$

Mais, en ajoutant au coefficient

$$(p-1)\,q\,(r-1)$$

le premier membre de l'égalité (3), qui est nul, le résultat est égal au coefficient

$$p(q-1)r$$

de l'autre produit. Donc, à cause de $CB = -BC$, on a

(4) $$AC'.BA'.CB' = -BC'.CA'.AB'.$$

Dans ces deux produits, les facteurs sont deux à deux situés sur une même droite, et par suite ils ont deux à deux des verseurs égaux ou opposés. Donc l'équation (4) subsiste quand on y considère les vecteurs comme remplacés par leurs modules.

467. Soient ABC un triangle, et AA', BB', CC' des droites concourant en un même point O, et rencontrant les côtés BC, CA, AB en A', B', C'. On aura, en prenant le point O pour origine, et désignant par p, q, r, t, u, v des coefficients réels,

(1) $$\mathrm{a}' = p.\mathrm{a}, \qquad \mathrm{b}' = q.\mathrm{b}, \qquad \mathrm{c}' = r.\mathrm{c},$$

(2) $$BA' = t.BC, \qquad CB' = u.CA, \qquad AC' = v.AB,$$

(3) $$A'C = (1-t)BC, \quad B'A = (1-u).CA, \quad C'B = (1-v).AB.$$

Les deux premières équations (2) peuvent s'écrire, en vertu des équations (1)

$$p.\mathrm{a} - \mathrm{b} = t(\mathrm{c} - \mathrm{b}), \qquad q.\mathrm{b} - \mathrm{c} = u(\mathrm{a} - \mathrm{c}),$$

d'où, en éliminant a,

$$(tu - u + pq)\,\mathrm{b} + (pu - p - tu)\,\mathrm{c} = 0,$$

équation qui se partage (art. 466) en deux autres

$$u(1-t) = pq, \qquad tu = -p(1-u).$$

Formant les quatre équations qui se déduisent des deux précédentes par des changements de lettres, on en tire, par multiplication,

$$tuv(1-t)(1-u)(1-v) = (pqr)^2,$$
$$(tuv)^2 = -pqr(1-t)(1-u)(1-v);$$

puis, en multipliant de nouveau et supprimant un facteur commun,

$$(tuv)^3 = -(pqr)^3, \qquad \text{d'où} \qquad tuv = -pqr,$$

et par suite

$$tuv = (1-t)(1-u)(1-v).$$

Les équations (2) et (3) donneront, par conséquent,

$$BA'.CB'.AC' = A'C.B'A.C'B,$$

égalité qui subsistera encore lorsqu'on y remplacera les vecteurs par leurs modules.

468. Si l'on a une relation identique quelconque entre des quantités $a, b, c, \ldots$, on pourra supposer que ces quantités représentent des vecteurs. En l'interprétant alors conformément au sens que l'on attache aux opérations relatives aux vecteurs, on obtiendra un théorème de géométrie.

Ainsi, on a identiquement

$$(\text{B}-\text{A})(\text{D}-\text{C}) + (\text{D}-\text{A})(\text{C}-\text{B}) + (\text{C}-\text{A})(\text{B}-\text{D}) = 0.$$

En supposant que A, B, C, D soient des vecteurs ou des points du plan, la relation subsistera et donnera

(1) $$AB.CD + AD.BC + AC.DB = 0.$$

Si l'on pose maintenant

$$AB.CD = \lambda.\text{P}, \quad AD.BC = \lambda.\text{Q}, \quad AC.DB = \lambda.\text{R},$$

les trois vecteurs P, Q, R, dont la somme est nulle en vertu de l'égalité (1), pourront former les trois côtés d'un triangle.

Supposons maintenant que ce triangle se réduise à une droite, ce qui arrivera si l'on a entre les modules la relation

(2) $$\mathfrak{T}\text{P} + \mathfrak{T}\text{Q} + \mathfrak{T}\text{R} = 0.$$

Alors, si θ est l'argument commun de P et de Q, l'argument de $\text{R} = -(\text{P}+\text{Q})$ sera égal à $\theta \pm \pi$. Or

$$\arg \text{P} = \arg AB + \arg DC, \text{ etc.}$$

Donc

$$\arg AB + \arg CD = \arg AD + \arg BC = \pi + \arg AC + \arg DB,$$

d'où

$$\arg AB - \arg AD + \arg CD - \arg BC = 0,$$

c'est-à-dire, CB' étant le prolongement de BC,

$$\text{angle}\,DAB + \text{angle}\,B'CD = 0,$$

ou, en ayant égard au sens des angles,

$$DAB = DCB' = \pi - BCD,$$

ce qui indique que le quadrilatère ABCD est inscriptible au cercle. L'égalité (2) n'est autre chose que le théorème de Ptolémée,

$$\mathfrak{T}AB.\mathfrak{T}CD + \mathfrak{T}AD.\mathfrak{T}BC = \mathfrak{T}AC.\mathfrak{T}DB.$$

469. Passons à la solution d'un problème, énoncé par Lagrange dans son Mémoire « *Sur la construction des cartes géographiques* [1] » :

Trois points R, R', R'' *étant donnés, construire sur une même base* AB *trois triangles dont les sommets soient aux points donnés, et qui soient tels 1° que les différences des angles au sommet* BRA, BR'A, BR''A *soient données; 2° que les raisons des côtés qui comprennent ces angles, c'est-à-dire* $\frac{RB}{RA}, \frac{R'B}{R'A}, \frac{R''B}{R''A}$, *soient entre elles dans des rapports donnés.*

Si l'on désigne par $r_\rho, r'_{\rho'}, r''_{\rho''}$ les trois biradiales ARB, AR'B, AR''B, les données du problème seront les rapports des modules

$$\frac{r'}{r} = m, \quad \frac{r''}{r} = n,$$

et les différences des arguments

$$\rho' - \rho = \mu, \quad \rho'' - \rho = \nu.$$

On pourra facilement construire, en grandeur et en direction, deux vecteurs R''G, R'H, tels que l'on ait

$$\frac{R'B}{R'A} : \frac{RB}{RA} = m_\mu = \frac{R''G}{R''A},$$

$$\frac{R''B}{R''A} : \frac{RB}{RA} = n_\nu = \frac{R'H}{R'A}.$$

---

[1] *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1779. — *Œuvres de Lagrange*, t. IV, p. 682. — Lagrange ajoute : « Or ce Problème me paraît assez difficile à résoudre par la Géométrie; et quant à la solution algébrique, je ne l'ai pas tentée... »

En éliminant de ces équations les quantités,

$$R'A = RA - RR', \qquad R'B = RB - RR',$$
$$R''A = RA - RR'', \qquad R''B = RB - RR'',$$

pour ne conserver que les deux inconnues RA, RB, il vient

$$(RB - RR').R''R.RA = (RA - RR').R''G.RB,$$
$$(RB - RR'').R'R.RA = (RA - RR'').R'H.RB.$$

Retranchant ces deux égalités l'une de l'autre, et divisant par RB, on obtient, toutes réductions faites,

$$GH.RA = RR'.R''G + RR''.R'H.$$

Si l'on construit les triangles RR''I, RR'K, respectivement semblables à GHR', HGR'', on aura KA = RI, ce qui déterminera le point A.

Pour trouver simplement le point B, on recommencera un calcul semblable, en posant cette fois

$$m_\mu = \frac{R''R}{R''G'}, \qquad n_\nu = \frac{R'R}{R'H'}.$$

470. ***Trouver le sommet commun* X *de deux triangles inversement semblables, dont on donne les bases* AD, BC *(fig. 64).***

La condition de similitude inverse de deux triangles revient à celle de l'égalité de la biradiale correspondante à l'un avec la conjuguée de la biradiale correspondante à l'autre, ce qui donne

$$\frac{AX}{AD} = \frac{\overline{BX}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AX} - \overline{AB}}{\overline{BC}}.$$

La conjuguée de cette équation donne

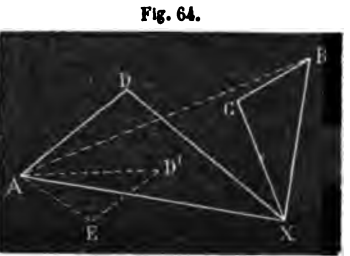
$$\frac{\overline{AX}}{\overline{AD}} = \frac{BX}{BC}, \qquad \text{d'où} \qquad \overline{AX} = \frac{BX.\overline{AD}}{BC},$$

et par suite

$$\frac{AX}{AD} = \frac{BX.\overline{AD}}{\overline{BC}.BC} - \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{(AX - AB).\overline{AD}}{\overline{BC}.BC} - \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}.$$

Si l'on prend maintenant, pour plus de simplicité, AB comme axe des x, on aura $\overline{AB} = AB$, et l'équation précédente deviendra

Fig. 64.



$$AX.(AD.\overline{AD} - BC.\overline{BC}) = AB.AD.(\overline{AD} + BC),$$

ou, en désignant par D' le point symétrique de D relativement à AB, et faisant D'E = BC,

$$AX[(\mathfrak{T}AD)^2 - (\mathfrak{T}BC)^2] = AB.AD.AE.$$

Le coefficient de AX étant réel, l'argument de AX doit être égal à celui du produit AD.AE, c'est-à-dire à

$$\arg AE + \arg AD = \arg AE - \arg AD' = \text{angle}\, D'AE.$$

Donc l'angle DAX = CBX = D'AE, ce qui détermine la position du point X.

471. *Inscrire dans un cercle un quadrilatère* WXYZ, *dont les côtés* WX, XY, YZ *passent respectivement par des points donnés* A, B, C, *et dont le quatrième côté* ZW *soit de longueur donnée.*

Prenons le centre O du cercle pour origine, et une droite quelconque O1 pour axe des abscisses. La condition pour que les points A, W, X soient en ligne droite donne

$$a - w = p(a - x);$$

éliminant p entre cette équation et sa conjuguée

$$\bar{a} - \bar{w} = p(\bar{a} - \bar{x}),$$

il vient

$$\frac{a - w}{\bar{a} - \bar{w}} = \frac{a - x}{\bar{a} - \bar{x}};$$

ou, à cause de $w.\bar{w} = x.\bar{x} =$ le carré du rayon du cercle $= 1$, en prenant ce rayon pour unité,

$$\frac{(a - w)w}{\bar{a}.w - 1} = \frac{(a - x)x}{\bar{a}.x - 1} = \frac{a(w - x) - (w^2 - x^2)}{\bar{a}(w - x)} = \frac{a - w - x}{\bar{a}},$$

d'où l'on tire

(1) $$W = \frac{A - X}{1 - \bar{A} . X}.$$

On aura de même

(2) $$X = \frac{B - Y}{1 - \bar{B} . Y},$$

(3) $$Y = \frac{C - Z}{1 - \bar{C} . Z}.$$

Connaissant d'ailleurs la longueur du côté ZW, on connaît l'arc ZW, et par suite l'angle ZOW, et son verseur K. On aura donc

(4) $$W = K . Z.$$

De là on tirera, par des substitutions et des constructions successives,

$$W = \frac{A - B + (1 - A . \bar{B}) Y}{1 - \bar{A} . B + (\bar{A} - \bar{B}) Y} = \frac{A_1 + F . Y}{\bar{F} + \bar{A}_1 . Y}$$

$$= \frac{A_1 + C . F - (F + A_1 . \bar{C}) Z}{\bar{F} + \bar{A}_1 . B - (\bar{A}_1 + \bar{C} . \bar{F}) Z} = \frac{A_2 - G . Z}{\bar{G} - A_2 . Z} = \frac{A_2 - G . \frac{W}{K}}{\bar{G} - \bar{A}_2 . \frac{W}{K}},$$

d'où

$$W + K \frac{A_2}{\bar{A}_2} . \frac{1}{W} = \frac{G + KG}{\bar{A}_2} = H.$$

Le facteur $\frac{A_2}{\bar{A}_1}$, étant un produit de verseurs, a pour module l'unité, ainsi que $\frac{1}{W}$. Donc le point W est distant d'un point connu H d'une longueur égale au rayon du cercle donné, et par suite on l'obtiendra par l'intersection de ce cercle avec un cercle égal de centre H.

On voit donc que, pour résoudre le problème, il faut construire $A_1 = A - B = BA$, $1F = - A . \bar{B}$, et par suite $\frac{1F}{OA} = - \frac{O\bar{B}}{O1}$. Faisant le triangle OAP inversement semblable à O1B, on mènera $1F = - OP = PO$. On construira ensuite le triangle

OFQ directement semblable à 01C, et l'on mènera $A_1A_2 = 0Q$; puis on fera le triangle $0A_1R$ inversement semblable à 01C, et l'on mènera $FG = 0R$. Soit maintenant 1K une corde égale à la longueur donnée du côté ZW, d'où $0K =$ le verseur κ. Menons la bissectrice 0M de l'angle 10K; elle fera avec 0G l'angle $= 10G - \frac{1}{2}10M$ et avec le conjugué $0\overline{G}$ l'angle $10\overline{G} + \frac{1}{2}10M$. Donc elle sera bissectrice de l'angle que fait 0G avec la droite qui a pour argument $10G + 10K$, c'est-à-dire avec le vecteur $\overline{G}K = g'$. En achevant donc le losange GOG'M, on aura $0M = g + \overline{g}.\kappa$. Il ne restera plus qu'à construire le triangle 0MH inversement semblable à $0A_11$. La perpendiculaire sur le milieu de 0H coupera le cercle donné au sommet W du quadrilatère cherché.

Le rayon 01 peut être dirigé arbitrairement. Si on le fait coïncider avec 0C, les triangles 01C, 0FG, $0A_1R$ se réduiront à trois droites coupées proportionnellement.

472. Transformation des coordonnées rectilignes.

Soient α, β les arguments des axes positifs $0x, 0y$; α', β' ceux des nouveaux axes $0x', 0y'$, de même origine. On aura pour la double expression du vecteur d'un point quelconque,

(1) $$z = x_\alpha + y_\beta = x'_{\alpha'} + y'_{\beta'}.$$

En développant, et séparant le réel de l'imaginaire, il vient

(2) $$\begin{cases} x\cos\alpha + y\cos\beta = x'\cos\alpha' + y'\cos\beta', \\ x\sin\alpha + y\sin\beta = x'\sin\alpha' + y'\sin\beta', \end{cases}$$

d'où

(3) $$\begin{cases} x\sin(\beta - \alpha) = x'\sin(\beta - \alpha') + y\sin(\beta - \beta'), \\ y\sin(\beta - \alpha) = x'\sin(\alpha' - \alpha) + y'\sin(\beta' - \alpha). \end{cases}$$

Si l'on transporte l'origine au point $c'_{\gamma'}$, on aura

$$z = x'_{\alpha'} + y'_{\beta'} + c'_{\gamma'},$$

et l'on devra ajouter aux seconds membres des formules (2) les termes $+c'\cos\gamma'$, $+c'\sin\gamma'$, et aux seconds membres des formules (3) les termes $+c'\sin(\beta - \gamma')$, $+c'\sin(\gamma' - \alpha)$.

§ III.

Applications à la théorie des courbes planes.

473. Soit z un point du plan ou un vecteur variable, t une variable réelle. Si l'on établit entre ces deux variables une relation quelconque

(1) $$z = f(t),$$

le lieu géométrique des points pour lesquels elle sera satisfaite sera une ligne déterminée. Car, si l'on remplace z par $x+iy$, et que l'on sépare le réel de l'imaginaire, l'élimination de t conduira à une équation entre les coordonnées x, y du point.

Réciproquement, il est aisé de voir que l'équation de toute courbe plane peut se ramener à la forme (1). Car on peut toujours supposer que les deux coordonnées, rectangulaires ou polaires, de chaque point de la courbe soient exprimées en fonction d'une variable t (qui peut coïncider avec l'une d'elles). Alors $z=x+iy=r.1_\varphi$ sera aussi une fonction donnée de t.

474. D'après ce que nous avons vu, a étant une quantité réelle,

(1) $$z = \mathbf{a}t$$

représente l'axe réel 01;

(2) $$z = i\mathbf{a}t$$

l'axe imaginaire $0i$;

(3) $$z = \mathbf{a}_\alpha t$$

une droite faisant avec 01 l'angle α;

(4) $$z = i\mathbf{a}_\alpha t$$

une droite perpendiculaire à la droite (3),

(5) $$z = \mathbf{a}_{\alpha+\beta} t$$

une droite faisant avec la droite (3) l'angle β;

(6) $$z = \mathbf{a}_\alpha t + \mathbf{b}_\beta$$

une droite parallèle à (3) et passant par le point $\mathbf{b}_\beta$.

Si l'on désigne par a, b des points ou des vecteurs,

(7) $$z + (t-1)a - tb = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{z-a}{b-a} = t$$

sera l'équation de la droite qui joint les deux points a et b.

Si

(8) $$z = at, \qquad z = a't$$

sont deux vecteurs, le verseur de l'angle qu'ils font entre eux sera

(9) $$1_\theta = \frac{a'}{a};$$

ils seront perpendiculaires entre eux, si $\frac{a'}{a} = \pm i$.

Les bissectrices des angles de ces vecteurs seront données par la formule

(10) $$z = t\sqrt{\pm aa'},$$

où l'on prendra le signe + ou le signe —, suivant que les côtés de l'angle considéré correspondront à des valeurs de t de même signe ou de signe contraire.

Les deux droites

(11) $$z = at + b, \qquad z = a't + b'$$

seront parallèles, si $\frac{a'}{a}$ est réel.

L'équation d'une droite menée par le point b perpendiculairement à $z = at$ sera

(12) $$z = iat + b.$$

Celle d'une droite menée par b et faisant avec $z = at$ l'angle θ sera

(13) $$z = 1_\theta at + b.$$

475. Un vecteur a de longueur constante $\mathfrak{T}a$ et d'argument variable, dont une des extrémités est fixe, décrit par son autre extrémité une circonférence. Ainsi

(14) $$z = a.1_t = a_t$$

est l'équation d'un cercle de rayon $\mathfrak{T}a$ et dont le centre est à l'origine;

(15) $$z = a_t + b$$

est l'équation d'un cercle de même rayon et de centre b.

Si le centre d'un cercle de rayon $\mathfrak{T}a$ se transporte le long d'une droite $z=bt$, tandis que le rayon tourne autour du centre, l'extrémité de ce rayon décrira une cycloïde,

(16) $$z = a_t + bt,$$

allongée ou raccourcie, suivant que $\mathfrak{T}b$ sera $>\mathfrak{T}a$ ou $<\mathfrak{T}a$.

Si le centre décrit un autre cercle de rayon $\mathfrak{T}b$,

(17) $$z = a_t + b_{nt}$$

sera l'équation d'une épicycloïde ou d'une hypocycloïde.

On verra de même que

	les équations	représentent
(18)	$z = ta_t$	... une spirale d'Archimède;
(19)	$z = a_t e^{nt}$	... une spirale logarithmique;
(20)	$z = a_t(1 - it)$	... une développante de cercle;
(21)	$z = a_t \cdot \dfrac{t}{\sin t}$	... une quadratrice;
(22)	$z = a\left(t + \dfrac{i}{t}\right)$	... une hyperbole;

etc.

476. Si $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sont deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse, et u, v deux variables réelles assujetties à la condition

$$u^2 + v^2 = 1,$$

l'ellipse pourra être représentée par les équations

$$x = \mathbf{a}u, \quad y = \mathbf{b}v.$$

En désignant maintenant par α, β les angles que ces diamètres font avec l'axe 01, le rayon vecteur OM du point M(x, y) sera

$$z = x_\alpha = y_\beta = \mathbf{a}_\alpha u + \mathbf{b}_\beta v,$$

ou, en désignant par a, b les deux vecteurs $\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{b}_\beta$,

(1) $$z = au + bv.$$

On peut prendre, par exemple, $u = \cos t$, $v = \sin t$, d'où

(2) $$z = a \cos t + b \sin t.$$

En particulier, si $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sont les demi-axes de l'ellipse, on peut supposer $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, d'où

(3) $$z = \mathbf{a} \cos t + i\mathbf{b} \sin t.$$

Si dans (2) on remplace t par $t + \frac{\pi}{2}$, on aura un autre point N de l'ellipse, représenté par

(4) $$z_1 = -a \sin t + b \cos t.$$

Or, l'expression

$$Z = z \cos T + z_1 \sin T = a \cos(T + t) + b \sin(T + t)$$

représente encore un point de l'ellipse, quel que soit T. Donc $OM = z$ et $ON = z_1$ sont deux demi-diamètres conjugués; de sorte que l'on passe d'un diamètre à son conjugué en faisant varier t de $\frac{\pi}{2}$.

Les équations (2) et (4) donnent

$$z^2 + z_1^2 = a^2 + b^2 = f^2 = (a + ib)(a - ib),$$

d'où l'on conclut que le vecteur f est la moyenne proportionnelle bissectrice des vecteurs $a + ib$, $a - ib$.

On peut encore construire

$$f = \sqrt{a\left(a + \frac{b^2}{a}\right)},$$

en construisant le triangle Obc directement semblable à Oab, d'où $c = \frac{b^2}{a}$, et menant la ligne ad égale et parallèle à Oc. Alors f sera la moyenne proportionnelle bissectrice de Oa et Od. Les deux points f et $f_1 = -f$ ainsi obtenus sont les foyers de l'ellipse.

L'équation $z^2 + z_1^2 = f^2$ donnera

$$z_1^2 = \mathrm{ON}^2 = (f - z)(z - f_1) = \mathrm{M}f . f_1\mathrm{M}.$$

Donc le demi-diamètre conjugué de OM est la moyenne proportionnelle bissectrice des deux rayons vecteurs $\mathrm{M}f$, $f_1\mathrm{M}$; il est donc parallèle à la bissectrice de l'angle formé par un de ces rayons vecteurs et le prolongement de l'autre.

On aurait eu l'équation de l'hyperbole, en supposant, dans (1), u et v assujettis à l'équation

$$u^2 - v^2 = 1,$$

en prenant, par exemple, $u = \mathrm{Ch}\,t$, $v = \mathrm{Sh}\,t$.

477. Étant donnée l'équation d'une courbe

$$z = f(t),$$

la différentielle dz représentera en grandeur et en direction l'élément d'arc de la courbe, et, si l'on désigne par ds la longueur de cet élément et par ω l'angle de la tangente avec l'axe 01, on aura

$$dz = 1_\omega . ds.$$

La valeur de ds est la moyenne proportionnelle entre dz et son conjugué [art. 462, (3)],

$$ds = \sqrt{dz . \overline{dz}};$$

l'angle ω est déterminé [art. 462, (4)] par la formule

$$1_\omega = \sqrt{\frac{dz}{\overline{dz}}}.$$

En différentiant cette dernière expression, on obtient l'angle de contingence $d\omega$. On a

$$d . 1_\omega = d . e^{i\omega} = ie^{i\omega} d\omega = 1_\omega . i d\omega,$$

d'où

$$d\omega = -i . 1_{-\omega} d 1_\omega$$

Ainsi, pour la spirale logarithmique, à cause de $d(a_t)=ia_t dt$, on trouve

$$dz=(i+n)\,a_t e^{nt}dt, \qquad d\bar{z}=(-i+n)\,a_{-t}e^{nt}dt$$

$$ds=\sqrt{1+n^2}.e^{nt}dt, \qquad 1_\omega=a_t\sqrt{\frac{n+i}{n-i}}.$$

Pour l'ellipse rapportée à ses axes [art. 476, (3)], on a

$$dz=(-\mathrm{a}\sin t+i\mathrm{b}\cos t)dt,$$

d'où résulte

$$ds=\sqrt{\mathrm{a}^2\sin^2 t+\mathrm{b}^2\cos^2 t}.dt.$$

478. Cherchons maintenant l'équation de la tangente. Cette équation étant de la forme [art. 471, (3)]

$$\zeta=z+a\tau,$$

où τ est une variable réelle, le coefficient angulaire a doit être égal [art. 474, (11)] à dz multiplié par une quantité réelle, que nous pourrons choisir égale à $\frac{1}{dt}$. En posant donc

$$\frac{dz}{dt}=z',$$

nous avons, pour l'équation de la tangente au point z,

(1) $$\zeta=z+z'\tau.$$

D'après cela, l'équation de la normale au même point sera

(2) $$\zeta=z+iz'\tau;$$

celle d'une *oblique*, faisant avec la tangente l'angle γ,

(3) $$\zeta=z+1_\gamma z'\tau.$$

479. *Exemples.* I. D'après cela, la tangente à la spirale logarithmique aura pour équation, à cause de $dz=(n+i)z\,dt$,

$$\zeta=z[1+(n+i)\tau].$$

L'angle θ qu'elle fait avec le rayon vecteur est donné par une équation de la forme

$$1_\theta=k\frac{z'}{z}=k(p+qi),$$

k étant un coefficient réel, d'où

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{q}{p},$$

et dans le cas actuel

$$1_\theta = k(n+i), \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{1}{n} = \text{const.}$$

II. L'équation de la tangente à l'ellipse est

$$\zeta = a\cos t + b\sin t + (-a\sin t + b\cos t)\tau = z + z_1\tau,$$

z_1 étant le demi-diamètre conjugué de z. Donc la tangente est parallèle au diamètre conjugué du vecteur du point de contact.

ζ étant la somme des deux composantes $a(\cos t - \tau\sin t)$, $b(\sin t + \tau\cos t)$, parallèles l'une à $0a$, l'autre à $0b$, cette droite rencontrera l'un de ces diamètres lorsque sa composante parallèle à l'autre diamètre sera nulle, c'est-à-dire que, pour $\tau = -\operatorname{tang} t$, la tangente rencontrera $0a$ en un point dont le vecteur sera

$$\zeta_a = \frac{a}{\cos t}.$$

De même, elle rencontrera $0b$ au point

$$\zeta_b = \frac{b}{\sin t}.$$

On en tire la relation

$$\frac{a^2}{\zeta_a^2} + \frac{b^2}{\zeta_b^2} = 1.$$

III. La parabole étant engendrée par la composition de deux mouvements, l'un dirigé suivant $0a$ et proportionnel au carré du temps, l'autre dirigé suivant $0b$ et proportionnel au temps, son équation sera

$$z = at^2 + bt,$$

a, b étant deux vecteurs constants quelconques.

On aura, pour l'équation de la tangente,

$$\zeta = at^2 + bt + (2at + b)\tau.$$

Cette tangente rencontre $O'a$ pour $\tau = -t$, ce qui donne $\zeta_a = -at^2$. Ce point est donc, par rapport à l'origine, le symétrique de l'extrémité de la composante at^2 parallèle à Oa. La tangente rencontre Ob pour $\tau = -\frac{1}{2}t$, d'où $\zeta_b = -\frac{1}{2}bt$.

Par le point M, menons une droite Mf, qui fasse avec la tangente le même angle que celle-ci fait avec Oa. En introduisant un facteur réel indéterminé k, on aura

$$\frac{1}{k} Mf : MT = MT : Oa,$$

d'où, en remplaçant MT par $\zeta - z = (2at + b)\tau$,

$$Mf = \frac{k\tau^2}{a}(2at + b)^2.$$

Donc $Of = OM + Mf$ a pour valeur

$$(1 + 4k\tau^2)(at^2 + bt) + k\tau^2 \frac{b^2}{a},$$

et cette valeur sera indépendante de t, si l'on prend $k\tau^2 = -\frac{1}{4}$, d'où

$$Of = -\frac{b^2}{4a},$$

valeur qu'il est facile de construire. Il existe donc un point fixe par lequel passent toutes les droites faisant avec la tangente un angle égal à l'angle de celle-ci avec Oa. C'est le foyer de la parabole.

480. *Trouver l'angle que forme la tangente d'une courbe avec la droite qui, partant du point de contingence, divise en deux parties égales la corde infiniment petite, menée parallèlement à cette tangente* (1).

---

(1) CARNOT, *Géométrie de position*, p. 477.

Représentons par $z=f(t)$ l'équation de la courbe; soient z_0 le milieu de la corde,

$$z_1=f(t+h), \qquad z_{-1}=f(t-h')$$

ses extrémités. On a

$$z_0=\frac{z_1+z_{-1}}{2}.$$

La droite qu'il s'agit de déterminer est la droite

$$\overrightarrow{zz_0}=z_0-z.$$

Or on a, en désignant par z_1''', z_1'' des quantités quelconques infiniment peu différentes de z''', z'',

$$z_1=z+hz'+\frac{h^2}{2}z''+\frac{h^3}{6}z_1''',$$

$$z_{-1}=z-h'z'+\frac{h'^2}{2}z''-\frac{h'^3}{6}z_1''',$$

d'où, aux quantités du troisième ordre près,

$$z_0-z=\frac{h-h'}{2}z'+\frac{h^2+h'^2}{2}z_1''.$$

Il faut maintenant déterminer h' de manière que la corde z_1-z_{-1} soit parallèle à la tangente en z, et par suite qu'elle soit égale à z' multiplié par une quantité réelle. Or on a

$$z_1-z_{-1}=(h+h')z'+\frac{h^2-h'^2}{2}z''+\frac{h^3+h'^3}{6}z_1'''$$

$$=(h+h')\left[z'+\frac{h-h'}{2}z''+\frac{h^2-hh'+h'^2}{6}z_1'''\right].$$

Pour que cette quantité soit à z' dans un rapport réel, il faut que l'on ait

$$\frac{h-h'}{2}z''+\frac{h^2-hh'+h'^2}{6}z_1'''=\lambda z',$$

ou, en faisant $h-h'=\delta$, et écrivant $\frac{1}{6}\lambda$ au lieu de λ,

$$\delta z+\frac{h'^2+\delta h'+\delta^2}{3}z_1'''=\tfrac{1}{3}\lambda z',$$

ou enfin, en remarquant que δ doit être infiniment petit du second ordre, négligeant les quantités d'ordre supérieur, et écrivant δ, λ au lieu de $\frac{\delta}{h^2}, \frac{\lambda}{h^2}$,

$$3\delta z'' + z''' = \lambda z',$$

λ devant être réel, ainsi que δ. En séparant l'équation en deux autres, on déterminera δ et λ.

On a ensuite, avec le même ordre d'approximation,

$$z_0 - z = \frac{\delta h^2}{2} z' + \frac{h^2}{2} z'',$$

ou simplement, en multipliant par le facteur réel $\frac{2}{h^2}$,

$$z_0 - z = \delta z' + z'',$$

ce qui détermine la droite cherchée.

Exemple. Soit la développante du cercle

$$z = a_t(1 - it).$$

On a

$$z' = a_t . t, \quad z'' = a_t(1 + it), \quad z''' = a_t(2i - t),$$

d'où

$$3\delta(1 + it) + 2i - t = \lambda t,$$

et par suite

$$3\delta - (1 + \lambda)t = 0, \quad 3\delta t + 2 = 0, \quad \delta = -\frac{2}{3t},$$

$$z_0 - z = 1_t\left(\frac{1}{3} + it\right).$$

On a ensuite $\frac{z_0 - z}{z'} = \frac{1}{3t} + i = k . 1_\psi$, ψ étant l'angle de la droite $z_0 - z$ avec la tangente, d'où

$$\tang \psi = 3t.$$

481. Cherchons actuellement le centre de courbure, intersection de deux normales infiniment voisines.

Pour passer d'une normale à la suivante, il faut changer t en $t + dt$. Au point d'intersection des deux normales, ζ doit être le même, et par conséquent $d\zeta$ doit être nul; mais τ aura

dû varier d'une normale à l'autre, et se changer en $\tau+d\tau$. On différentiera donc l'équation

(1) $$\zeta = z + iz'\tau$$

de la normale par rapport à t (dont z dépend) et à τ, en laissant ζ constant, et l'on aura ainsi l'équation

(2) $$0 = z'\left(1+i\frac{d\tau}{dt}\right)+iz''\tau,$$

laquelle se partagera en deux équations réelles, d'où l'on tirera les valeurs de τ et de $\frac{d\tau}{dt}$ pour le point d'intersection. En mettant pour τ, dans l'équation (1), la valeur trouvée, on aura le ζ du centre de courbure, correspondant au point z.

La longueur du rayon de courbure sera donnée par la formule

(3) $$\rho = \sqrt{(\zeta-z)(\bar{\zeta}-\bar{z})} = \tau\sqrt{z'\bar{z}'}.$$

Si, dans l'équation qui donne le ζ du centre de courbure, on considère t comme variable, on aura l'équation du lieu des centres de courbure ou de la développée de la courbe proposée.

Le même calcul s'applique à la recherche du lieu des intersections successives des obliques représentées par l'équation

(4) $$\zeta = z + 1_\gamma z'\tau;$$

ce lieu porte le nom de *développée imparfaite* de la courbe.

482. *Exemples*. I. L'équation de la parabole, rapportée à son axe principal,

$$z = \mathbf{a}t^2 + i\mathbf{b}t$$

donne, pour l'équation de l'oblique qui fait l'angle γ avec la tangente,

$$\zeta = \mathbf{a}t^2 + i\mathbf{b}t + 1_\gamma(2\mathbf{a}t + i\mathbf{b})\tau,$$

d'où, en différentiant sans faire varier ζ,

$$0 = (2\mathbf{a}t + i\mathbf{b})\left(1 + 1_\gamma\frac{d\tau}{dt}\right) + 1_\gamma.2\mathbf{a}\tau,$$

puis, en séparant le réel de l'imaginaire,

$$0 = 2\mathbf{a}t + (2\mathbf{a}t\cos\gamma - \mathbf{b}\sin\gamma)\frac{d\tau}{dt} + 2\mathbf{a}\tau\cos\gamma,$$

$$0 = \mathbf{b} \quad + (2\mathbf{a}t\sin\gamma + \mathbf{b}\cos\gamma)\frac{d\tau}{dt} + 2\mathbf{a}\tau\sin\gamma.$$

On en tire, en éliminant $\frac{d\tau}{dt}$,

$$\tau = -\frac{4\mathbf{a}^2t^2 + \mathbf{b}^2}{2\mathbf{a}\mathbf{b}}\sin\gamma,$$

d'où, en substituant dans l'équation de l'oblique,

$$\zeta + i\frac{\mathbf{b}^2\sin\gamma}{2\mathbf{a}}.1_\gamma = \mathbf{a}t^2 + i\mathbf{b}t - 1_\gamma.\sin\gamma\left(\frac{4\mathbf{a}^2t^3 + \mathbf{b}^2t}{\mathbf{b}} + 2\mathbf{a}it^2\right).$$

En posant $\zeta = \xi + i\eta$, et séparant le réel de l'imaginaire, on aura, par l'élimination de t, l'équation de la développée imparfaite de la parabole en coordonnées rectangulaires.

Pour $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $1_\gamma = i$, il vient

$$\zeta - \frac{\mathbf{b}^2}{2\mathbf{a}} = 3\mathbf{a}t^2 - i.\frac{4\mathbf{a}^2t^3}{\mathbf{b}},$$

d'où l'on déduit aisément l'équation de la développée ordinaire.

II. La cycloïde ordinaire, rapportée à son point de rebroussement, a pour équation, le rayon du cercle générateur étant pris pour unité,

$$z = t + i(1 - 1_{-t}).$$

L'équation de la tangente sera donc, à cause de $d.1_{-t} = d.e^{-it} = -1_{-t}.idt$,

$$\zeta = t + (\tau + i)(1 - 1_{-t}).$$

Pour $\tau = i\frac{1 + 1_{-t}}{1 - 1_{-t}} = \cot\frac{t}{2}$, on a $\zeta = t + 2i$. Donc la tangente passe par l'extrémité supérieure du diamètre du cercle générateur.

L'équation de la normale est

$$\zeta = t + i(1 + \tau)(1 - 1_{-t}).$$

Elle donne $\zeta = t$ pour $\tau = -1$; donc la normale passe au point de contact du cercle générateur. En différentiant, il vient

$$0 = 1 - (1+\tau).1_{-t} + i(1-1_{-t})\frac{d\tau}{dt},$$

d'où l'on tire $\tau = -2$, et par suite le rayon de courbure est double de la *normale*. L'équation de la développée est donc

$$\zeta = t - i(1-1_{-t}),$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\zeta + \pi + 2i = t + \pi + i(1 - 1_{-(t+\pi)}),$$

et qui représente, par suite, une cycloïde égale à la proposée.

Si l'on cherche de même la développée imparfaite, lieu des intersections des obliques

$$\zeta = t + (i + 1_{\gamma}\tau)(1-1_{-t}),$$

on trouve $\tau = -2\sin\gamma$, et l'on obtient, pour l'équation du lieu,

$$\zeta = t + i.1_{2\gamma}(1-1_{-t}),$$

ou

$$\zeta + 2\gamma + (1-1_{2\gamma})i = t - 2\gamma + i[1 - 1_{-(t-2\gamma)}],$$

équation qui représente encore une cycloïde égale à la première.

483. La recherche des développées est un cas particulier du problème des enveloppes, et la solution de celui-ci peut être comprise, avec celle du problème des trajectoires orthogonales ou obliquangles, dans une même formule commune.

Soit

$$(1) \qquad z = f(t, \lambda)$$

l'équation d'une courbe, renfermant un paramètre arbitraire λ, que nous supposerons *réel,* comme la variable t. Si l'on considère une ligne rencontrant toutes les courbes de la série représentée par cette équation pour les différentes valeurs de λ, les divers points de cette ligne correspondront à des valeurs de z données par l'équation (1), où l'on fera varier

simultanément t et λ. Si l'on établit entre ces deux quantités une certaine relation, on déterminera la nature de la ligne qui traverse les courbes (1).

Supposons maintenant que la trajectoire cherchée doive couper les lignes (1) sous un angle constant θ. On exprimera cette condition en écrivant que l'angle des tangentes à la ligne (1) et à la trajectoire (tangentes que l'on obtient en considérant tour à tour λ comme constant et comme variable) est égal à l'angle donné θ.

En différentiant l'équation (1) dans les deux hypothèses, et posant, pour abréger,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} = z', \qquad \frac{\partial z}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial \lambda} = z_{,},$$

on trouvera respectivement, pour les coefficients angulaires des deux tangentes,

$$\frac{dz}{dt} = z', \qquad \frac{dz}{dt} = z' + z_{,}\frac{d\lambda}{dt}.$$

On aura donc, pour déterminer l'angle que ces tangentes font entre elles [art. 462, (6)]

$$\frac{z' + z_{,}\dfrac{d\lambda}{dt}}{\bar{z}' + \bar{z}_{,}\dfrac{d\lambda}{dt}} : \frac{z'}{\bar{z}'} = 1_{2\theta},$$

ou en faisant $1_{2\theta} = m$,

$$(2) \qquad (mz'\bar{z}_{,} - \bar{z}'z_{,})\frac{d\lambda}{dt} + (m-1)z'\bar{z}' = 0.$$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, alors $m = -1$, et l'on a, pour l'équation aux trajectoires orthogonales,

$$(3) \qquad (z'\bar{z}_{,} + \bar{z}'z_{,})\frac{d\lambda}{dt} + 2z'\bar{z}' = 0.$$

484. L'équation (2) sert aussi à la détermination des courbes enveloppes. En y faisant $\theta = 0$, d'où $m = 1$, le second

terme de l'équation disparaît, et si l'on supprime le facteur $\frac{d\lambda}{dt}$, qui, égalé à zéro, donnerait une quelconque des enveloppées, on a, pour déterminer l'enveloppe, l'équation

(4) $$z'\bar{z}_1 - \bar{z}' z_1 = 0.$$

Tirant de là la valeur de λ, et la reportant dans l'équation (1), on aura l'équation de l'enveloppe.

Remarque. L'égalité (4) se présente sous la forme

$$(p+iq)(p'-iq')-(p-iq)(p'+iq')=0,$$

laquelle se réduit à la forme plus simple

(5) $$-pq'+qp'=0, \quad \text{ou} \quad \frac{p}{p'}=\frac{q}{q'}.$$

485. *Exemples.* I. Trouver l'enveloppe des ellipses d'aire constante et dont les axes coïncident en direction.

Soit

$$z = \lambda\cos t + i\mu\sin t$$

l'équation d'une de ces ellipses, λ et μ étant liés par la relation

$$\lambda\mu = k^2.$$

On a, en différentiant,

$$z' = -\lambda\sin t + \mu\cos t, \quad z_1 = \cos t + i\frac{d\mu}{d\lambda}\sin t,$$

d'où, par la formule (5),

$$\frac{-\lambda\sin t}{\cos t} = \frac{\mu\cos t}{\frac{d\mu}{d\lambda}\sin t}, \quad \text{ou} \quad \lambda d\mu\sin^2 t + \mu d\lambda\cos^2 t = 0.$$

Comme l'équation de condition donne $\lambda d\mu = -\mu d\lambda$, il en résulte que l'on doit avoir

$$\sin^2 t - \cos^2 t = 0, \quad \text{d'où} \quad t = \pm\frac{\pi}{4}.$$

Remplaçant t par cette valeur et μ par $\frac{k^2}{\lambda}$, l'équation proposée devient

$$z = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\lambda \pm i\frac{k^2}{\lambda}\right),$$

λ étant la variable. Cette équation est celle de deux hyperboles équilatères, ayant les axes coordonnés pour asymptotes.

II. Cherchons encore les trajectoires obliquangles d'une cycloïde mobile le long de sa base, et représentée par l'équation

$$z' = \lambda + t + i(1 - 1_{-t}).$$

On a ici

$$z = 1 - 1_{-t}, \qquad z_t = 1;$$

l'équation (2) devient alors

$$0 = [\sin\theta + \sin(t - \theta)]\frac{d\lambda}{dt} + 2\sin\theta(1 - \cos t),$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$2\sin\frac{t}{2}\cos\left(\frac{t}{2} - \theta\right)\frac{d\lambda}{dt} + 4\sin\theta\sin^2\frac{t}{2} = 0,$$

ou

$$\cos\left(\frac{t}{2} - \theta\right)\frac{d\lambda}{dt} + 2\sin\theta\sin\left(\frac{t}{2} - \theta + \theta\right) = 0,$$

$$\frac{d\lambda}{dt} + 2\sin^2\theta + \sin 2\theta \operatorname{tang}\left(\frac{t}{2} - \theta\right) = 0,$$

et l'on en tire, en intégrant,

$$\lambda = C - 2\sin^2\theta . t + 2\sin 2\theta \log\cos\left(\frac{t}{2} - \theta\right).$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\lambda = C - 2t$, et l'on a, pour les trajectoires orthogonales de la cycloïde mobile, l'équation

$$z = C - t + i(1 - 1_{-t}).$$

Ces trajectoires sont donc des cycloïdes égales à la proposée.

III. Trouver les trajectoires obliquangles de toutes les ellipses de mêmes foyers f, f_1.

D'après ce que nous avons vu (art. 476 et 479, II), un segment MT, pris sur la tangente au point M, est égal, à un facteur réel près, à la moyenne proportionnelle entre les deux rayons vecteurs f_1M, Mf, de sorte que le coefficient angulaire de la tangente est de la forme

$$k\sqrt{f_1\mathrm{M}.\mathrm{M}f}.$$

*

Celui de la tangente à la trajectoire sera donc

$$k.1_\theta.\sqrt{f_1\mathrm{M}.\mathrm{M}f} = k_\theta\sqrt{(0\mathrm{M}-0f_1)(0f-0\mathrm{M})}\,,$$

ou enfin, à cause de $0f_1 = -0f$,

$$\frac{dz}{dt} = k_\theta\sqrt{f^2 - z^2}\,.$$

En intégrant cette équation, et faisant entrer dans t le facteur réel qui le multiplierait, on a, pour l'équation des trajectoires obliquangles de l'ellipse

$$z = f\cos(t_\theta + C)\,.$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a $t_\theta = it$, et il vient

$$z = f\cos C.\mathrm{Ch}\,t - if\sin C.\mathrm{Sh}\,t,$$

équation d'une hyperbole de mêmes foyers que les ellipses.

486. Appliquons encore les théories précédentes à la recherche des trajectoires et des enveloppes des normales et des obliques d'une courbe plane.

Considérons l'équation d'une oblique

$$\zeta = z + 1_\gamma.\frac{dz}{dt}\tau\,.$$

Pour appliquer à cette ligne la formule (2), il faut remplacer dans celle-ci z, t, λ respectivement par ζ, τ, t, et par suite

$$z' \quad \text{par} \quad \frac{\partial\zeta}{\partial\tau} = 1_\gamma.\frac{dz}{dt}\,,$$

$$\text{et} \quad z_, \quad \text{par} \quad \frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{dz}{dt} + 1_\gamma\frac{d^2z}{dt^2}\tau\,,$$

et l'équation (2) deviendra, par ces substitutions, en écrivant z', z'' au lieu de $\frac{dz}{dt}, \frac{d^2z}{dt^2}$,

$$(6) \quad 0 = [(m.1_\gamma - 1_{-\gamma})z'\bar{z}' + (mz'\bar{z}'' - \bar{z}'z'')\tau]\frac{dt}{d\tau} + (m-1)z'\bar{z}',$$

ou

$$(7)\qquad 0 = \sin\theta\, d\tau + \sin(\theta+\gamma)\, dt + \frac{\tau}{2i}\left(1_\theta \frac{d\bar{z}'}{\bar{z}'} - 1_{-\theta}\frac{dz'}{z'}\right).$$

En posant (art. 477) $dz = 1_\omega ds$, et de plus $s' = \frac{ds}{dt}$, on a

$$\frac{dz'}{z'} = d\log z' = d(i\omega + \log s') = i\,d\omega + \frac{ds'}{s'}.$$

L'équation (7) devient alors, sous forme réelle,

$$(8)\qquad 0 = \sin\theta\, d\tau + \sin(\theta+\gamma)\, dt + \tau\left(-\cos\theta\, d\omega + \sin\theta \frac{ds'}{s'}\right).$$

Si l'on fait, dans ces formules, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, on aura, sous ses diverses formes, l'équation différentielle des trajectoires obliquangles des normales .

Si l'on fait $\theta = \frac{\pi}{2}$, on aura l'équation des trajectoires orthogonales des obliques.

Si l'on suppose $\theta = 0$, on aura l'équation de l'enveloppe des obliques, laquelle donne

$$\tau = -\frac{2i\sin\gamma . z'\bar{z}'}{z'\bar{z}'' - \bar{z}'z''} = \sin\gamma \frac{dt}{d\omega},$$

de sorte que l'équation de la développée imparfaite sera

$$(9)\qquad \zeta = z + (1 - 1_{2\gamma})z' . \frac{z'\bar{z}'}{z'\bar{z}'' - \bar{z}'z''},$$

ou, sous une forme plus simple,

$$(10)\qquad \zeta = z + 1_\gamma \sin\gamma \frac{dz}{d\omega}.$$

En supposant $\gamma = \frac{\pi}{2}$, on a les formules analogues pour la développée ordinaire,

$$(11)\qquad \zeta = z + 2z' . \frac{z'\bar{z}'}{z'\bar{z}'' - \bar{z}'z''} = z + i\frac{dz}{d\omega},$$

d'où l'on tirerait aisément les formules connues.

487. Si l'on fait à la fois $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, l'équation (7) devient

$$0 = \frac{d\tau}{\tau} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\bar{z}'}{\bar{z}'} + \frac{dz'}{z'}\right),$$

laquelle donne, en intégrant,

$$\tau = \frac{C}{\sqrt{z'\bar{z}'}} = C\frac{dt}{ds},$$

et par suite l'équation générale des trajectoires orthogonales des normales sera

$$\zeta = z + iC\frac{dz}{ds},$$

ou encore

(12) $$\zeta = z + iC.1_{\omega}.$$

On voit par là que le module de $\zeta - z$ est constant, et que, par suite, tous les points d'une même trajectoire orthogonale sont équidistants de la courbe donnée, c'est-à-dire que les trajectoires sont des courbes *parallèles* entre elles et à la proposée. Cette propriété aurait pu servir à poser directement l'équation (12).

Si, au lieu de compter les distances constantes sur les normales, on les compte sur les obliques inclinées de l'angle γ sur la tangente, il suffira de remplacer, dans l'équation précédente, le coefficient de perpendicularité i par le verseur oblique 1_{γ}, et l'on aura, pour l'équation de la trajectoire qui coupe ces obliques à une distance constante de leur rencontre avec la courbe,

(13) $$\zeta = z + C.1_{\omega+\gamma}.$$

488. Cherchons enfin la trajectoire des obliques à la courbe, dont la tangente en chaque point est parallèle à la tangente menée à la courbe en son point de rencontre avec la même oblique. La trajectoire cherchée étant représentée par

$$\zeta = z + 1_{\gamma}z'\tau,$$

où τ désigne une fonction inconnue de t, il faut que pour la

même valeur de t, les tangentes à la trajectoire et à la courbe soient parallèles, ce qui conduit à la condition

$$\frac{\zeta'}{\bar{\zeta}'} = \frac{z'}{\bar{z}'},$$

ou, en mettant pour ζ' sa valeur $z'\left(1 + 1_\gamma \frac{d\tau}{dt}\right) + 1_\gamma z''\tau$, et réduisant,

$$\sin\gamma \frac{d\tau}{\tau} + \frac{1}{2i}\left(1_\gamma \frac{dz'}{z'} - 1_{-\gamma}\frac{d\bar{z}'}{\bar{z}'}\right) = 0.$$

Si l'on pose $dz = 1_\omega ds$, cette équation devient

$$\sin\gamma\left(\frac{d\tau}{\tau} + \frac{ds'}{s'}\right) + \cos\gamma\, d\omega = 0.$$

d'où, en intégrant,

$$\tau = C\frac{dt}{ds}e^{-\omega\cot\gamma},$$

et, par suite, l'équation de la trajectoire demandée sera

$$\zeta = z + Ce^{i\gamma - \omega\cot\gamma}\frac{dz}{ds} = z + Ce^{i(\gamma+\omega) - \omega\cot\gamma}.$$

On voit que les portions d'obliques comprises entre les deux courbes sont égales et parallèles aux rayons vecteurs d'une spirale logarithmique.

CHAPITRE VI.

DES BIRADIALES SITUÉES D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE DANS L'ESPACE.

§ Ier.

Addition des biradiales. Biradiales rectangles.

489. Nous avons rappelé, dans le Chapitre précédent, les règles de la composition des rotations dans un plan donné, ou des biradiales coplanaires, et nous en avons fait l'application à la solution de diverses questions de Géométrie plane.

Nous allons maintenant considérer des rotations s'effectuant autour d'un même centre fixe O, et dans des plans différents.

Une rotation imprimée à un système solide est déterminée quand on connaît : 1° le plan dans lequel se déplace le vecteur d'un point donné du système; 2° la grandeur et le sens de l'angle décrit par ce vecteur.

Nous dirons, d'après cela, que deux rotations sont ***égales***, lorsqu'elles s'effectuent dans le même plan (ou dans des plans parallèles), et que leurs angles ou ***arguments*** sont égaux et de même sens.

Le symbole complexe, qui exprime qu'une rotation se fait dans un plan donné et avec un argument donné, se nomme le ***verseur*** de cette rotation.

Une biradiale se composant de deux éléments, d'une multiplication du vecteur par un nombre (***module***, TENSOR), et d'une rotation de ce vecteur, deux biradiales sont égales quand elles ont même module et même verseur.

Si l'angle d'une biradiale est nul, la biradiale se réduit à son

module, ou au rapport des deux vecteurs qui se confondent en direction.

490. Lorsque l'angle MON d'une biradiale est droit, la biradiale est dite *rectangle*.

Une biradiale rectangle est complètement déterminée, quand on connaît son module, la position de son plan et son *sens* dans ce plan. Or ces deux derniers éléments sont connus lorsqu'on donne la position et le sens d'un vecteur perpendiculaire au plan de la biradiale, et dirigé de telle manière qu'un observateur placé suivant ce vecteur, les pieds appuyés sur le plan, verrait le rayon mobile tourner dans le sens *direct* (de droite à gauche), en passant du vecteur initial OM au vecteur final ON. De plus, on achèvera de déterminer la biradiale au moyen du vecteur, si l'on porte sur celui-ci une longueur représentant le module de la biradiale, ou le rapport de la longueur de ON à celle de OM.

Donc les mêmes données, numériques ou géométriques, servent à déterminer soit une biradiale rectangle, soit un vecteur perpendiculaire au plan de la biradiale *dans le sens positif*. On peut donc considérer la notation qui représente une biradiale rectangle comme représentant aussi un vecteur, et réciproquement.

Ce vecteur, qui peut remplacer la biradiale rectangle ou être remplacé par elle, se nomme le *vecteur* de cette biradiale rectangle.

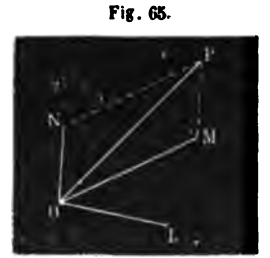
Si l'on porte sur le vecteur une longueur égale à l'unité, le *vecteur unitaire* ou *axe* ainsi obtenu représentera le verseur de la biradiale rectangle.

491. Deux biradiales rectangles conjuguées sont représentées par deux vecteurs égaux et opposés, et par suite de signe contraire. On voit d'ailleurs que, appliquées à un même vecteur mobile, elles lui font prendre deux positions égales et opposées. On est donc conduit à considérer deux biradiales rectangles conjuguées comme égales et de signe contraire, et

il en est de même des vecteurs qui leur servent d'axes, et auxquels on donnera, par analogie, le nom de *vecteurs conjugués*.

492. Soient deux biradiales collinéaires LOM, LON (*fig*. 65), et soit OP la somme géométrique de leurs vecteurs non communs OM, ON. Pour passer du vecteur OL respectivement aux vecteurs OM, ON, OP = OM + ON, il faut multiplier OL par les biradiales LOM, LON, LOP, et l'on aura alors

Fig. 65.



$$OL \times LOM + OL \times LON = OL \times LOP.$$

La biradiale LOP, par laquelle il faut multiplier un vecteur quelconque OL pour obtenir un vecteur égal à la somme des produits de OL par les deux biradiales LOM, LON, est appelée, par définition, la *somme* des biradiales LOM, LON.

Cette définition satisfait au principe de permanence, puisque, pour OL = 1, l'égalité précédente devient LOM + LON = LOP.

On voit que l'addition des biradiales, préalablement ramenées à être collinéaires, s'effectue par la simple addition des vecteurs terminaux. Cette opération jouit donc des mêmes propriétés que l'addition des vecteurs, et par suite aussi que l'addition arithmétique. Il en est de même de l'opération inverse, c'est-à-dire de la soustraction.

On peut aussi étendre ces propriétés à l'addition d'autant de biradiales collinéaires que l'on voudra, dont les vecteurs terminaux auront des directions quelconques dans l'espace.

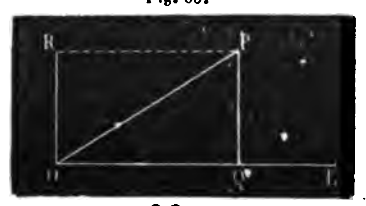
493. Réciproquement, étant donnée une biradiale LOP, on peut la *décomposer* en deux autres LOM, LON, dont les seconds vecteurs auront des directions données arbitrairement dans un plan quelconque passant par son vecteur terminal OP. Cette opération revient à la décomposition du vecteur OP suivant deux directions données.

Au lieu de prendre deux directions coplanaires avec OP, on

pourrait faire la décomposition suivant trois directions choisies à volonté dans l'espace.

494. Si l'on prend comme directions coplanaires avec OP la direction OL du rayon initial et la direction perpendiculaire OR, la biradiale LOP se trouvera décomposée en une biradiale *numérique* LOQ, d'argument nul, laquelle est exprimée par un nombre réel $=\frac{OQ}{OL}$, et en une biradiale rectangle LOR, qui peut être représentée par un vecteur (art. 490).

Fig. 66.



On voit donc que toute biradiale peut se décomposer dans la somme d'une *partie numérique*, ou *partie réelle*, ou *scalaire* (¹), et que nous distinguerons soit par la caractéristique $\mathfrak{S}$, soit par l'indice zéro placé au bas du symbole qui désigne la biradiale; et d'une biradiale rectangle, représentable par un vecteur, et que nous appellerons la *partie imaginaire* ou le *vecteur* de la biradiale. Nous dénoterons cette dernière partie soit au moyen de la caractéristique $\mathfrak{V}$, soit au moyen de l'indice i placé au bas du symbole de la biradiale.

D'après ces conventions, nous écrirons

$$\mathrm{LOP} = \mathfrak{S}\,\mathrm{LOP} + \mathfrak{V}\,\mathrm{LOP} = (\mathrm{LOP})_0 + (\mathrm{LOP})_i\,;$$

ou, si nous représentons la biradiale par la lettre A,

$$A = \mathfrak{S}A + \mathfrak{V}A = a_0 + a_i.$$

495. Représentons par $\mathbf{a} = \mathfrak{T}A = \frac{\mathfrak{T}\mathrm{OP}}{\mathfrak{T}\mathrm{OL}}$ le module, et par $\alpha = \mathfrak{A}A$ l'argument de la biradiale A; on aura

$$\mathfrak{T}\mathrm{OQ} = \mathfrak{T}\mathrm{OP}\cos\alpha, \qquad \mathfrak{T}\mathrm{OR} = \mathfrak{T}\mathrm{OP}\sin\alpha,$$

(¹) Scalar (Hamilton).

d'où l'on tire, pour les modules des biradiales composantes,

$$\mathfrak{T}\,\mathrm{LOQ} = \frac{\mathfrak{T}\,\mathrm{OQ}}{\mathfrak{T}\,\mathrm{OL}} = \mathbf{a}\cos\alpha, \qquad \mathfrak{T}\,\mathrm{LOR} = \frac{\mathfrak{T}\,\mathrm{OR}}{\mathfrak{T}\,\mathrm{OL}} = \mathbf{a}\sin\alpha.$$

Si, d'autre part, on désigne par A le verseur de la biradiale rectangle LOR, lequel est représenté par un vecteur unitaire perpendiculaire à son plan, on aura

$$\mathrm{LOR} = a_\iota = \mathbf{a}\sin\alpha.\mathrm{A}.$$

Donc la biradiale $A = \mathbf{a}_\alpha$ peut s'écrire sous la forme

$$A = a_0 + a_\iota = \mathbf{a}(\cos\alpha + \mathrm{A}\sin\alpha).$$

L'expression

$$\mathfrak{U}A = 1_\alpha = \cos\alpha + \mathrm{A}\sin\alpha$$

représente le verseur de la biradiale $A = \mathbf{a}.1_\alpha$, c'est-à-dire le facteur que nous avons désigné jusqu'ici par 1_α. Le vecteur unitaire A est l'*axe* de la biradiale quelconque $A = \mathbf{a}_\alpha$, aussi bien que de la biradiale rectangle ou du vecteur

$$a_\iota = \mathbf{a}\sin\alpha.\mathrm{A}.$$

Une biradiale rectangle a sa partie réelle $a_0 = \mathbf{a}\cos\alpha$ nulle, et se réduit à sa partie imaginaire ou à son vecteur $a_\iota = \mathbf{a}\mathrm{A}$.

496. Un vecteur a_ι peut se décomposer suivant trois directions rectangulaires $\mathrm{O}\mathrm{I}_1, \mathrm{O}\mathrm{I}_2, \mathrm{O}\mathrm{I}_3$, choisies arbitrairement (art. 423). En désignant par a_1, a_2, a_3 les trois projections algébriques de la longueur du vecteur sur ces axes, on aura, d'après ce que nous avons vu concernant l'addition des vecteurs,

$$a_\iota = a_1\mathrm{I}_1 + a_2\mathrm{I}_2 + a_3\mathrm{I}_3,$$

$\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3$ désignant des vecteurs unitaires portés sur les parties positives des trois axes rectangulaires.

Il résulte de là qu'une biradiale $A = a_0 + a_\iota$ peut toujours se décomposer en quatre parties hétérogènes sous la forme

$$A = a_0 + a_1\mathrm{I}_1 + a_2\mathrm{I}_2 + a_3\mathrm{I}_3,$$

a_0, a_1, a_2, a_3 étant des nombres, et $\text{I}_1, \text{I}_2, \text{I}_3$ trois *unités imaginaires*, portées sur trois directions rectangulaires données.

On a entre les divers éléments de la biradiale les relations

$$a_0 = \mathfrak{S}A = \text{a}\cos\alpha, \quad \mathfrak{T}a_i = \mathfrak{T}\mathfrak{V}A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \text{a}\sin\alpha,$$

$$\text{a} = \mathfrak{T}A = \sqrt{a_0^2 + (\mathfrak{T}a_i)^2} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

On voit par là qu'une biradiale peut être représentée par une expression complexe composée de quatre termes. Une telle expression s'appelle un *quaternion*.

497. Pour passer d'une biradiale à sa conjuguée, il suffit de changer le signe de l'argument α, ce qui donne

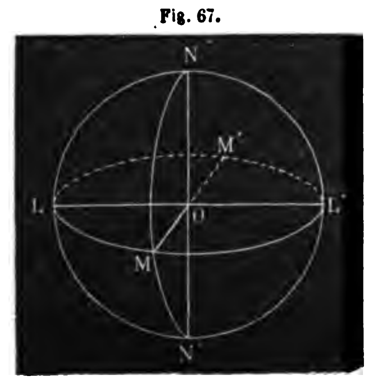
$$\bar{A} = \mathfrak{T}A.(\cos\alpha - \text{A}\sin\alpha).$$

On obtiendrait la même expression en changeant le signe de l'axe A, ou celui du vecteur a_i, ou ceux des projections a_1, a_2, a_3 du vecteur, ou enfin ceux des trois unités imaginaires $\text{I}_1, \text{I}_2, \text{I}_3$.

498. Un vecteur et une biradiale rectangle ayant la même représentation, le produit d'un vecteur par une biradiale rectangle (coplanaire avec ce vecteur) pourra être considéré comme résultant de la multiplication de deux vecteurs, ou de deux biradiales rectangles, ou encore d'une biradiale rectangle par un vecteur.

Faisons abstraction, pour plus de simplicité, des modules des vecteurs ou des biradiales, en les supposant tous égaux à l'unité.

Fig. 67.



Soit le vecteur OL (*fig.* 67) à multiplier par une biradiale rectangle située dans le même plan, et que nous représenterons par LOM. On peut remplacer le vecteur OL par la biradiale MON, et la biradiale LOM par le vecteur ON.

Le produit du vecteur OL par la biradiale LOM étant égal au

vecteur OM ou à la biradiale NOL, cette égalité pourra s'écrire sous les diverses formes

$$\mathrm{OL} \times \mathrm{LOM} = \mathrm{MON} \times \mathrm{LOM} = \mathrm{MON} \times \mathrm{ON}$$
$$= \mathrm{OL} \times \mathrm{ON} = \mathrm{OM} = \mathrm{NOL}.$$

On peut encore représenter ce produit par

$$\mathrm{N'OM} \times \mathrm{MOL'} = \mathrm{N'OL'},$$

ce qui est un cas particulier de la formule (9) de l'art. 449.

499. Le formule précédente

$$\mathrm{OL} \times \mathrm{ON} = \mathrm{OM} = -\,\mathrm{OM'}$$

nous montre que le produit de deux vecteurs rectangulaires entre eux est égal à un troisième vecteur, perpendiculaire aux deux premiers, et dirigé en sens contraire de l'axe positif du mouvement du premier facteur vers le second.

Si donc nous considérons trois vecteurs unitaires, rectangulaires entre eux, $\mathrm{O}\iota_1, \mathrm{O}\iota_2, \mathrm{O}\iota_3$, que nous désignerons plus brièvement par $\iota_1, \iota_2, \iota_3$, chacun de ces vecteurs étant l'axe positif correspondant au mouvement l'un vers l'autre des deux vecteurs restants, pris dans l'ordre cyclique direct des indices 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, ..., on aura les relations

(1) $$\iota_2\iota_3 = -\,\iota_1, \quad \iota_3\iota_1 = -\,\iota_2, \quad \iota_1\iota_2 = -\,\iota_3.$$

De plus, si l'on échange entre eux les facteurs OM, ON, cela revient à échanger entre eux les axes opposés OM, OM', de sorte qu'on aura

$$\mathrm{ON} \times \mathrm{OL} = \mathrm{OM'} = -\,\mathrm{OM}.$$

Par conséquent, nous obtiendrons les trois nouvelles relations

(2) $$\iota_3\iota_2 = +\,\iota_1, \quad \iota_1\iota_3 = +\,\iota_2, \quad \iota_2\iota_1 = +\,\iota_3,$$

En comparant les formules (1) et (2), on voit que la multiplication des unités imaginaires n'est pas commutative.

500. Supposons maintenant qu'un vecteur quelconque OL soit multiplié par la biradiale rectangle LOM, ce qui le change en OM, puis une seconde fois par la même biradiale ou par son égale MOL', ce qui le change en OL' = — OL. Le résultat de cette double opération sera donc de changer OL en —OL, ou de multiplier OL par — 1. Si donc on appelle ***produit*** de deux biradiales (art. 449) la biradiale telle que la multiplication d'un vecteur quelconque par cette biradiale puisse remplacer les multiplications successives du même vecteur par les deux premières, on devra poser

$$\mathrm{LOM} \times \mathrm{LOM} = (\mathrm{LOM})^2 = -1,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{ON}^2 = -1.$$

Donc ***le carré d'une biradiale rectangle unitaire est égal à*** — 1.

On a, par conséquent,

(3) $$\iota_1^2 = \iota_2^2 = \iota_3^2 = -1.$$

501. Des formules (1), (2), (3) on tire

$$(\iota_1 \times \iota_2) \times \iota_3 = -\iota_3 \times \iota_3 = -\iota_3^2 = +1.$$
$$\iota_1 \times (\iota_2 \times \iota_3) = \iota_1 \times -\iota_1 = -\iota_1^2 = +1.$$

Donc

(4) $$(\iota_1 \times \iota_2) \times \iota_3 = \iota_1 \times (\iota_2 \times \iota_3) = \iota_1\iota_2\iota_3 = +1,$$

et par suite la multiplication des facteurs $\iota_1, \iota_2, \iota_3$, pris dans l'ordre cyclique direct, est ***associative***.

On aurait de même

(5) $$(\iota_3 \times \iota_2) \times \iota_1 = \iota_3 \times (\iota_2 \times \iota_1) = \iota_3\iota_2\iota_1 = -1;$$

donc la multiplication des mêmes facteurs, pris dans l'ordre cyclique inverse, est encore associative.

On a ensuite

$$(\iota_1 \times \iota_2) \times \iota_1 = -\iota_3 \times \iota_1 = +\iota_2.$$
$$\iota_1 \times (\iota_2 \times \iota_1) = \iota_1 \times \iota_3 = +\iota_2:$$

donc

(6). $(\iota_1 \times \iota_2) \times \iota_1 = \iota_1 \times (\iota_2 \times \iota_1) = \iota_1 \iota_2 \iota_1 = + \iota_2,$

et de même pour tous les autres cas analogues. Donc la multiplication des unités imaginaires est une opération associative.

§ II.

Multiplication des biradiales.

502. Soient maintenant LOM, MON deux biradiales, que nous supposerons préalablement ramenées à être collinéaires (art. 450). Si l'on accomplit d'abord sur OL le déplacement indiqué par LOM, puis sur le résultat le déplacement indiqué par MON, on aura multiplié OL par LOM, et le produit OM par MON. On aurait pu faire passer le vecteur variable de la position initiale OL à la position finale ON, en le multipliant directement par la biradiale LON. La multiplication par cette dernière équivalant aux multiplications consécutives par LOM et MON, on dit que la biradiale LON est le produit des biradiales LOM, MON. On aura ainsi, par définition, quels que soient les vecteurs OL, OM, ON (art. 449),

$$\text{LOM} \times \text{MON} = \text{LON}.$$

503. Représentons provisoirement par

$$A = \mathbf{a}_\alpha, \quad B = \mathbf{b}_\beta, \quad C = \mathbf{c}_\gamma$$

les trois biradiales précédentes, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ étant leurs modules, et α, β, γ leurs arguments ***considérés en grandeur et en position,*** $\mathbf{a}_\alpha$, par exemple, se réduisant à $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}$ pour $\alpha = 0$, et à $\mathbf{a}_\pi = -\mathbf{a}$ pour $\alpha = \pi$.

Pour effectuer la multiplication $A \times B$ des deux premières biradiales, on fait d'abord le produit des modules

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c},$$

de sorte qu'on a entre les modules des deux facteurs et celui du produit la relation

$$\mathfrak{T}A.\mathfrak{T}B = \mathfrak{T}(AB);$$

le module du produit est égal au produit des modules des facteurs.

On exécute ensuite sur les angles LOM, MON une opération qui, si ces angles étaient dans le même plan, serait une addition.

Séparons, pour plus de simplicité, cette opération de la multiplication des modules, en mettant chaque biradiale sous la forme du produit de son module par son verseur. En désignant, conformément à notre notation provisoire, les verseurs par $1_\alpha, 1_\beta, 1_\gamma$, nous aurons

$$A = \mathbf{a}.1_\alpha, \quad B = \mathbf{b}.1_\beta, \quad C = \mathbf{c}.1_\gamma.$$

Il est clair qu'il revient au même de faire les multiplications du vecteur par **a**, puis par **b**, en même temps qu'on lui fait subir les changements successifs de direction indiqués par $1_\alpha, 1_\beta$, ou bien de le multiplier tout d'un coup par $\mathbf{ab} = \mathbf{c}$, après l'avoir amené à sa direction finale en le multipliant par 1_γ. Nous pouvons donc nous occuper isolément du produit des verseurs

$$1_\alpha \times 1_\beta = 1_\gamma.$$

504. Imaginons une sphère de rayon $= 1$, décrite du centre O. Chaque vecteur unitaire sera représenté par un point de la sphère, et un verseur LOM sera représenté par l'arc de grand cercle LM.

Or, l'opération qui forme avec les deux verseurs LM, LN le verseur LN est tout à fait analogue à celle qui constitue l'addition des vecteurs dans le plan. Nous sommes donc conduits à donner à cette nouvelle opération le nom d'*addition*, et nous l'indiquerons par le signe $+$. Mais, pour la distinguer de

l'addition des vecteurs, dont elle diffère par un point essentiel. nous l'appellerons l'*addition sphérique*.

505. D'après cela, la multiplication des deux verseurs se fera par l'addition (sphérique) de leurs arguments (considérés en grandeur et en position), de sorte qu'on aura

$$1_\alpha \times 1_\beta = 1_{\alpha+\beta},$$

et, si l'on rétablit les modules quelconques,

$$\mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{b}_\beta = (\mathbf{a}.\mathbf{b})_{\alpha+\beta}.$$

Ainsi, la multiplication de deux biradiales se fait par la multiplication de leurs modules et l'addition (sphérique) de leurs arguments.

Cette règle donne, pour le produit de deux biradiales conjuguées,

$$A \times \bar{A} = \mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{a}_{-\alpha} = (\mathbf{a}^2)_{\alpha-\alpha} = (\mathbf{a}^2)_0 = \mathbf{a}^2 = (\mathfrak{T}A)^2,$$

ce qui s'accorde avec ce que nous avons vu (art. 452). On voit que, dans ce cas, la multiplication est commutative, comme cela a lieu, en général, toutes les fois que les biradiales sont coplanaires.

506. Nous connaîtrons donc les propriétés de la multiplication des biradiales, dès que nous connaîtrons celles de l'addition sphérique des arcs de grand cercle.

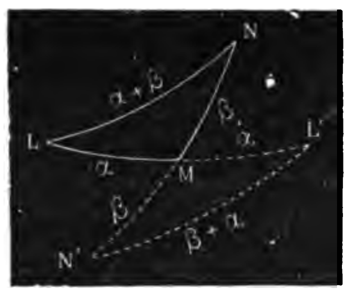
I. L'addition sphérique est évidemment une opération *uniforme*. Il en est donc de même de la multiplication des biradiales.

II. Si un seul des termes de la somme varie, le résultat varie. On en conclut (art. 372) que l'addition sphérique est une opération *complètement uniforme*, et il en est de même pour la multiplication des biradiales.

III. L'addition sphérique (si l'on excepte le cas de deux arcs coplanaires) *n'est pas commutative*.

En effet, pour obtenir la somme $\alpha + \beta$ de deux arcs, on les déplacera, s'il le faut, chacun sur son cercle, de manière que l'extrémité finale du premier α et l'extrémité initiale du second β viennent coïncider avec une des intersections M (*fig.* 68) des deux grands cercles. L'arc LN, qui joint alors l'extrémité initiale de α à l'extrémité finale de β, sera la somme cherchée $\alpha + \beta$.


Fig. 68.



Pour obtenir, au contraire, $\beta + \alpha$, on fera glisser les deux arcs sur leurs cercles respectifs, de manière que l'extrémité finale de β et l'extrémité initiale de α viennent en M, ces arcs prenant les positions N'M, ML'. La somme $\beta + \alpha$ sera alors représentée par l'arc N'L'.

Or, les arcs LN, N'L' n'étant pas, en général, dans le même plan, ne peuvent correspondre à des verseurs égaux, les arguments de ces verseurs étant les mêmes, mais leurs axes étant différents. Donc la somme LM + MN ne peut pas être considérée comme égale à la somme MN + LM. Partant, les deux produits

$$1_\alpha \times 1_\beta = 1_{\alpha+\beta}, \quad 1_\beta \times 1_\alpha = 1_{\beta+\alpha}$$

ne sont pas égaux.

Donc l'addition sphérique et la multiplication des biradiales sont des opérations *non commutatives*, ce qui les distingue de l'addition et de la multiplication ordinaires.

Remarque. — La figure OMN'L' est symétrique de la figure OMNL par rapport au rayon OM. Les deux arcs LN, N'L' sont donc égaux en grandeur, et sont également inclinés sur chacun des arcs LML', N'MN.

508. Dans le cas où les deux arcs LM, MN seraient égaux chacun à un quadrant, les arcs LN, N'L' feraient partie du même grand cercle, et ils seraient dirigés en sens opposé, et

par suite de signe contraire. Donc, si A et B sont deux biradiales rectangles, les produits $A \times B$ et $B \times A$ auront même module et des arguments égaux et de signe contraire. Ces produits sont donc deux *biradiales conjuguées*, de sorte que l'on a, A et B étant deux biradiales rectangles ou deux vecteurs,

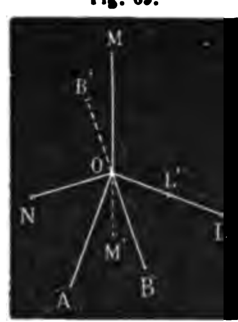
$$B \times A = \mathfrak{C}(A \times B).$$

Ainsi, *le produit de deux biradiales rectangles ou de deux vecteurs se change dans son conjugué, lorsqu'on intervertit l'ordre des facteurs.*

508. On peut encore présenter la démonstration comme il suit :

Le produit de deux vecteurs OA, OB est égal à celui des biradiales rectangles LOM, MON, que ces vecteurs représentent, lequelles sont situées dans des plans perpendiculaires à OA et à OB, et où l'on a pris $\frac{\text{OM}}{\text{OL}} = \frac{\text{OA}}{1}$, $\frac{\text{ON}}{\text{OM}} = \frac{\text{OB}}{1}$. Ce produit est donc représenté par la biradiale LON, située dans le plan des deux vecteurs, ayant pour module le produit des modules $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ des vecteurs, et pour argument le supplément de l'angle γ de ces vecteurs. Donc

Fig. 69.



$$\text{OA} \times \text{OB} = \mathbf{ab}(-\cos\gamma + \mathbf{c}\sin\gamma),$$

$\mathbf{c}$ étant l'axe unitaire pris sur la direction OM.

Cette biradiale LON peut être encore représentée par AOB', OB' étant un vecteur de longueur $\mathbf{a}^2\mathbf{b}$ porté sur le prolongement de BO.

On aura de même, en prenant $\frac{\text{OM}'}{\text{ON}} = \frac{\text{OB}}{1}$, $\frac{\text{OL}'}{\text{OM}'} = \frac{\text{OA}}{1}$,

$$\text{OB} \times \text{OA} = \text{NOM}' \times \text{M}'\text{OL}' = \text{NOL}' = (\mathbf{ab})_{\pi-\gamma}$$
$$= (\mathbf{ab})(-\cos\gamma - \mathbf{c}\sin\gamma),$$

l'axe de la biradiale NOL' étant de sens et de signe contraires à l'axe $\mathbf{c}$ de LON.

Les deux biradiales qui représentent les produits des mêmes vecteurs pris dans un ordre différent sont donc conjuguées.

509. Si l'on considère deux biradiales rectangles conjuguées MON, $\mathrm{MO\overline{N}}$, les produits obtenus en multipliant par ces biradiales une biradiale quelconque LOM seront les biradiales LON, $\mathrm{LO\overline{N}}$, lesquelles, appliquées au vecteur OL, donnent deux vecteurs égaux et de signe contraire ON, $\mathrm{O\overline{N}}$. Donc les produits LOM $\times$ MON, LOM $\times$ $\mathrm{MO\overline{N}}$ doivent être considérés comme égaux et de signe contraire. Il en est donc de même des facteurs MON, $\mathrm{MO\overline{N}}$. Ainsi, ***deux biradiales rectangles conjuguées sont égales et de signe contraire,*** comme nous l'avions déjà vu d'une autre manière (art. 491).

510. Le produit $AB = \mathbf{a}_\alpha . \mathbf{b}_\beta$ de deux biradiales quelconques LOM, MON étant représenté par $C = \mathbf{c}_\gamma$, soit $\overline{C}$ la biradiale conjuguée de ce produit. On a

$$\overline{C} = \mathbf{c}_{-\gamma} = \mathbf{c}_{\mathrm{NL}} = \mathbf{c}_{\mathrm{NM+ML}} = \mathbf{c}_{-\beta-\alpha} = \mathbf{b}_{-\beta} . \mathbf{a}_{-\alpha},$$

c'est-à-dire que l'on a

$$\overline{A.B} = \overline{B}.\overline{A}, \quad \text{ou} \quad \mathfrak{C}(A.B) = \mathfrak{C}B.\mathfrak{C}A.$$

Donc ***la biradiale conjuguée d'un produit de deux facteurs est égale au produit des conjugués des deux facteurs, pris dans l'ordre inverse.***

Si les biradiales sont rectangles, on a alors $\overline{A} = -A$, $\overline{B} = -B$ (art. 491). Donc

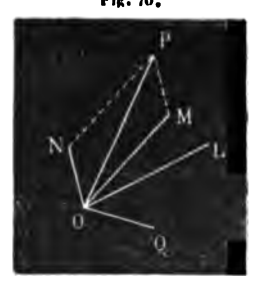
$$\overline{AB} = -AB = (-B)(-A) = +BA.$$

Donc le produit de deux biradiales rectangles ou de deux vecteurs change de signe ou se change dans son conjugué, quand on intervertit l'ordre des facteurs. C'est une extension de ce que nous avons vu (art. 499).

511. IV. ***La multiplication des biradiales jouit de la propriété distributive par rapport à l'addition.***

1° Soient d'abord trois biradiales *collinéaires* A, B, C. On pourra (art. 450) les transformer de manière qu'elles soient représentées par LOM, LON, QOL.

Fig. 70.



Si l'on construit $OP = OM + ON$, on aura alors

$$LOP = LOM + LON = A + B.$$

Cela posé, le produit

$$\begin{aligned} C.(A+B) &= QOL \times LOP = QOP = QOM + QON \\ &= (QOL \times LOM) + (QOL \times LON) = C.A + C.B. \end{aligned}$$

Donc la multiplication des biradiales collinéaires est distributive relativement au multiplicateur.

2° De l'équation

$$C.(A+B) = C.A + C.B$$

on tire, en prenant les conjugués des deux membres et appliquant le théorème de l'art. 510,

$$\overline{C.(A+B)} = \overline{(A+B)}.\bar{C} = (\bar{A}+\bar{B}).\bar{C} = \overline{C.A} + \overline{C.B} = \bar{A}.\bar{C} + \bar{B}.\bar{C}.$$

Or $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ peuvent représenter trois biradiales quelconques. Donc la formule

$$(\bar{A}+\bar{B}).\bar{C} = \bar{A}.\bar{C} + \bar{B}.\bar{C}$$

montre que la multiplication des biradiales collinéaires est distributive relativement au multiplicande.

3° L'addition des biradiales étant commutative, on en conclura, en raisonnant comme dans l'art. 385, que la multiplication des biradiales collinéaires est complètement distributive, c'est-à-dire que l'on a, pour quatre quelconques de ces biradiales,

$$(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD.$$

4° Considérons maintenant les trois biradiales rectangles A, B, C, ou les trois vecteurs OA, OB, OC qui les représentent,

et soit OA + OB = OK le vecteur égal à la somme des deux premiers. Le produit $C(A+B)$ sera représenté par la biradiale COK′, OK′ étant une longueur convenable $= (\mathfrak{T}C)^{\mathbf{\cdot}}.\mathrm{OK}$, portée sur le prolongement de KO. Mais on a, en prenant sur les prolongements de AO, BO, $\mathrm{OA'} = (\mathfrak{T}C)^{\mathbf{\cdot}}.\mathrm{OA}$, $\mathrm{OB'} = (\mathfrak{T}C)^{\mathbf{\cdot}}.\mathrm{OB}$,

$$\mathrm{COK'} = \mathrm{COA'} + \mathrm{COB'} = \mathrm{OC} \times \mathrm{OA} + \mathrm{OC} \times \mathrm{OB}.$$

Donc on a encore, pour les produits de vecteurs,

$$C(A+B) = C.A + C.B;$$

la multiplication est donc distributive relativement au multiplicateur.

On en conclurait, comme dans 2°, qu'elle l'est aussi relativement au multiplicande, et par suite qu'elle est complètement distributive.

5° Si l'une des biradiales A, B, C a un argument nul et se réduit à une biradiale *numériqne,* elle pourra toujours être considérée comme collinéaire avec les deux autres, puisqu'on peut prendre pour plan de cette biradiale un plan quelconque passant par la direction commune de ses deux vecteurs. La distributivité est donc encore démontrée dans ce cas.

Il en est de même si deux des trois biradiales sont numériques.

6° Soient maintenant quatre biradiales quelconques A, B, C, D. Une biradiale A pouvant se décomposer (art. 494) en une biradiale numérique a_0, plus une biradiale rectangle ou un vecteur a_ι, nous aurons, d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}(A+B)(C+D) &= (A+B)[(c_0+d_0)+(c_\iota+d_\iota)] \\ &= (A+B)(c_0+d_0) + (A+B)(c_\iota+d_\iota) \\ &= [(a_0+b_0)+(a_\iota+b_\iota)](c_0+d_0) + [(a_0+b_0)+(a_\iota+b_\iota)](c_\iota+d_\iota).\end{aligned}$$

En développant les produits, qui tous sont distributifs, on trouve un résultat identique à celui que l'on aurait obtenu en développant

$$\begin{aligned}(a_0+a_\iota)(c_0+c_\iota)+(a_0+a_\iota)(d_0+d_\iota)+(b_0+b_\iota)(c_0+c_\iota)+(b_0+b_\iota)(d_0+d_\iota) \\ = AC+AD+BC+BD.\end{aligned}$$

Donc la multiplication des biradiales quelconques est complètement distributive.

512. Nous avons vu (art. 496) qu'une biradiale peut se mettre sous la forme d'un quaternion ou quantité complexe à quatre termes.

Chacun des termes du quaternion peut être considéré comme une biradiale spéciale d'argument 0 ou $\frac{\pi}{2}$, et la biradiale donnée comme une somme de quatre biradiales. Donc la multiplication de deux biradiales, mises chacune sous forme de quaternions, jouira de la propriété distributive, et s'effectuera par conséquent d'après la règle de la multiplication des polynômes, fondée sur cette propriété. Cette multiplication rentre donc dans la définition que nous avons adoptée (art. 397) pour la multiplication des quantités complexes en général.

513. V. La multiplication des unités imaginaires étant associative (art. 501), on en conclura, d'après ce que nous avons vu (art. 398), que la multiplication des quaternions, et par suite celle des biradiales qu'ils représentent, est *associative.*

Mais l'importance du principe associatif, dans la théorie qui nous occupe, nous engage à en donner deux autres démonstrations directes.

514. 1re *Démonstration.* — 1° En faisant abstraction des modules, supposons d'abord trois biradiales unitaires LOM, MON, NOP, telles que le plan de la troisième passe par le vecteur final ON de la deuxième, lequel est aussi le vecteur final du produit LOM × MON = LON des deux premières. On a

$$(\text{LOM} \times \text{MON}) \times \text{NOP} = \text{LON} \times \text{NOP} = \text{LOP},$$
$$\text{LOM} \times (\text{MON} \times \text{NOP}) = \text{LOM} \times \text{MOP} = \text{LOP}.$$

Donc, dans ce cas, la multiplication est associative.

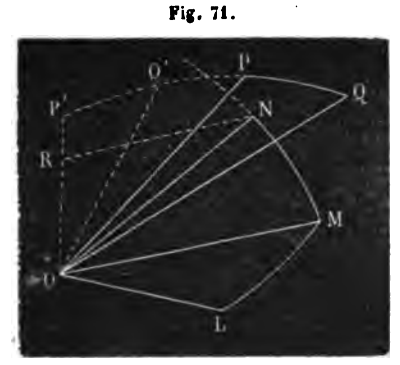
2° La propriété associative subsiste encore toutes les fois

que la seconde biradiale $MON = a_0$ est numérique, ce qui est un cas particulier de ce qui précède, le plan MON étant arbitraire. On a ainsi

$$(LOM \times a_0) \times NOP = LOM \times (a_0 \times NOP).$$

3° Soient maintenant trois biradiales quelconques LOM, MON, POQ (*fig.* 71). Si nous menons NR parallèle à OM, jusqu'à la rencontre du plan POQ en R, le vecteur ON sera décomposé en OR + RN, et par suite la biradiale MON en MOR + la biradiale numérique formée par les vecteurs parallèles OM, RN, et que nous désignerons par a_0. Or MOR ne diffère de MOP′ que par le module; de sorte que nous pouvons poser $MOR = b_0 . MOP'$, b_0 étant un nombre. Donc on peut remplacer la biradiale MON par $a_0 + b_0 . MOP'$.

Fig. 71.



En supposant donc la biradiale POQ transportée en P′OQ′, on a, en vertu de la propriété distributive,

$$LOM \times MON = LOM \times a_0 + LOM \times b_0 \times MOP',$$

d'où

$$(LOM \times MON) \times POQ$$
$$= (LOM \times a_0) \times P'OQ' + (LOM \times b_0 \times MOP') \times P'OQ',$$

ou, en vertu des lemmes précédents,

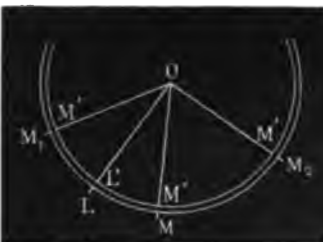
$$= LOM \times (a_0 \times P'OQ') + LOM \times [(b_0 \times MOP') \times P'OQ']$$
$$= LOM \times [(a_0 + b_0 \times MOP') \times P'OQ']$$
$$= LOM \times (MON \times POQ).$$

Donc la multiplication des biradiales quelconques est associative.

515. 2° *Démonstration.* — Cette démonstration, due à Möbius, est fondée sur la considération des rotations.

1° Soient un système solide Σ, mobile autour d'un point fixe O, et deux axes fixes OL, OM, partant du point O (*fig.* 72). Faisons tourner le système Σ d'une demi-révolution autour de l'axe fixe OL, ce qui amènera le vecteur mobile OM', qui coïncidait primitivement avec OM, à prendre la position OM_1. En faisant faire au système une nouvelle demi-révolution autour de l'autre vecteur fixe OM, OM' viendra se placer en OM_2, faisant avec sa position primitive OM un angle égal à 2LOM.

Fig. 72.



Donc deux demi-révolutions, effectuées consécutivement autour de deux axes fixes OL, OM, équivalent à une seule rotation effectuée dans le plan LOM, en tournant, de OL vers OM, d'un angle double de LOM.

Si nous désignons donc par OL_π une rotation d'un angle $= \pi$ autour de l'axe OL, et par [2LOM] une rotation d'un angle 2LOM dans le plan LOM; si, de plus, nous désignons par le signe $\times$ la combinaison de deux rotations, nous aurons la relation

(1) $$OL_\pi \times OM_\pi = [2LOM].$$

2° Soient maintenant ON, OP deux autres axes, situés dans un plan différent de LOM; nous aurons de même

(2) $$ON_\pi \times OP_\pi = [2NOP].$$

Les rotations [2LOM], [2NOP] étant indépendantes des positions des biradiales LOM, NOP dans leurs plans respectifs, on ne changera rien au résultat en amenant ces biradiales à avoir pour vecteur commun l'intersection des deux plans, et les remplaçant par les biradiales respectivement égales QOR, ROS. Les égalités précédentes deviendront alors

$$OQ_\pi \times OR_\pi = [2QOR],$$
$$OR_\pi \times OS_\pi = [2ROS].$$

3° Supposons maintenant que l'on opère consécutivement les déplacements représentés par les expressions,

$$OQ_\pi, \quad OR_\pi, \quad OR_\pi, \quad OS_\pi.$$

L'effet des deux premiers sera de faire tourner le système de l'angle 2QOR dans le plan QOR; l'effet des deux derniers, indépendant de la position d'où part le système, sera de le faire tourner de l'angle 2ROS dans le plan ROS.

Mais les deux rotations consécutives OR_π, OR_π, exécutées autour du même axe, produiront des effets qui se détruiront mutuellement, de sorte que l'effet des quatre rotations se réduit à celui des deux seules rotations

$$OQ_\pi \times OS_\pi = [2QOS].$$

On aura donc, quels que soient les trois vecteurs OQ, OR, OS,

$$(3) \qquad [2QOR] \times [2ROS] = [2QOS].$$

Par conséquent, Q, R, S étant les trois sommets d'un triangle sphérique, c'est-à-dire QS étant la *somme sphérique* de deux arcs QR, RS, il reviendra au même de faire tourner un système solide dans le plan QOS de l'angle représenté par l'arc 2QS, ou de le faire tourner d'abord dans le plan QOR de l'angle représenté par 2QR, puis dans le plan ROS de l'angle représenté par 2RS.

4° Réciproquement, si deux rotations consécutives, représentées, d'après les conventions précédentes, par $[2\varphi], [2\chi]$, ont le même résultat que la rotation unique représentée par $[2\psi]$, les demi-arcs correspondants φ, χ, ψ pourront se transporter sur leurs grands cercles respectifs de manière à former les trois côtés d'un triangle sphérique, de sorte que l'on aura, le signe $+$ indiquant l'addition sphérique,

$$\varphi + \chi = \psi;$$

car chacune des opérations considérées est *complètement* uniforme.

5° Cela posé, soient α, β, γ trois arcs de grand cercle quelconques. On aura

$$[2\alpha] \times [2\beta] = [2\delta], \quad \text{pour } \delta = \alpha + \beta,$$
$$[2\delta] \times [2\gamma] = [2\varepsilon], \quad \text{pour } \varepsilon = \delta + \gamma = (\alpha + \beta) + \gamma,$$

d'où résulte

$$\}[2\alpha] \times [2\beta]\{ \times [2\gamma] = [2\}(\alpha + \beta) + \gamma\{].$$

Mais l'effet combiné des rotations $[2\beta], [2\gamma]$ est indépendant de la position d'où part la sphère liée au système, et l'on peut toujours remplacer ces deux rotations consécutives par la rotation unique $[2\zeta]$, en prenant $\zeta = \beta + \gamma$. Donc

$$\begin{aligned}\}[2\alpha] \times [2\beta]\{ \times [2\gamma] &= [2\alpha] \times [2\zeta] \\ &= [2\alpha] \times [2(\beta + \gamma)] = [2\}\alpha + (\beta + \gamma)\{].\end{aligned}$$

Les rotations $[2\}(\alpha+\beta)+\gamma\{], [2\}\alpha+(\beta+\gamma)\{]$ sont donc équivalentes, ce qui exige que les arcs $(\alpha+\beta)+\gamma$ et $\alpha+(\beta+\gamma)$ soient sphériquement égaux, c'est-à-dire qu'ils soient de même grandeur, de même sens, et qu'ils appartiennent à un même grand cercle.

Donc l'addition sphérique est une opération associative, et, par suite, il en est de même de la multiplication des biradiales.

On pourra donc écrire

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma,$$

et, de même,

$$(\mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{b}_\beta) \times \mathbf{c}_\gamma = \mathbf{a}_\alpha \times (\mathbf{b}_\beta \times \mathbf{c}_\gamma) = \mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{b}_\beta \times \mathbf{c}_\gamma.$$

516. Au point de vue géométrique, ce théorème répond à la construction suivante :

Soient trois arcs de grand cercle quelconques

$$\mathrm{LM} = \alpha, \quad \mathrm{NP} = \beta, \quad \mathrm{QR} = \gamma.$$

Si l'on construit, par la règle de l'addition sphérique,

Fig. 73.



1° $\alpha+\beta=\delta,\quad \delta+\gamma=\varepsilon,$

2° $\beta+\gamma=\zeta,\quad \alpha+\zeta=\varepsilon',$

les deux arcs

$$\varepsilon=(\alpha+\beta)+\gamma,$$
$$\varepsilon'=\alpha+(\beta+\gamma)$$

seront égaux en grandeur, et appartiendront au même grand cercle.

Hamilton a donné de cette proposition une démonstration géométrique directe, qui établit en même temps la propriété associative de la multiplication des biradiales.

517. De ce que nous venons de démontrer il s'ensuit que, si $A, B, C, \ldots$ sont des biradiales en nombre quelconque, on a, par exemple,

$$[(A.B).C]D=[A.(B.C)]D=A.[(B.C).D]=A.[B.(C.D)]$$
$$=(A.B).(C.D)=\ldots=A.B.C.D,$$

en supprimant les parenthèses, pour désigner la valeur commune de tous ces produits.

518. Développons maintenant les calculs de la multiplication des biradiales, mises sous la forme de quaternions.

Soient à multiplier l'un par l'autre les deux quaternions

$$A=a_0+a_1 i_1+a_2 i_2+a_3 i_3,$$
$$B=b_0+b_1 i_1+b_2 i_2+b_3 i_3,$$

et soit

$$AB=C=c_0+c_1 i_1+c_2 i_2+c_3 i_3$$

leur produit.

En effectuant la multiplication d'après le principe distributif, et ayant égard aux formules des art. 499 et 500, relatives à la multiplication des unités imaginaires, on trouve, pour les valeurs des coefficients du produit C,

$$(1)\qquad \begin{cases} c_0 = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3, \\ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 + |a_3 b_2|, \\ c_2 = a_0 b_2 + a_2 b_0 + |a_1 b_3|, \\ c_3 = a_0 b_3 + a_3 b_0 + |a_2 b_1|. \end{cases}$$

519. Si l'on met les deux biradiales sous la forme

$$A = a_0 + a_\iota, \qquad B = b_0 + b_\iota,$$

leur produit deviendra

$$(2)\qquad AB = a_0 b_0 + a_0 b_\iota + b_0 a_\iota + a_\iota b_\iota.$$

En intervertissant l'ordre des facteurs, on aura

$$BA = a_0 b_0 + a_0 b_\iota + b_0 a_\iota + b_\iota a_\iota.$$

Les deux produits ne diffèrent donc que par leur dernier terme, qui est le produit des deux vecteurs. Or on a, par ce qui précède,

$$a_\iota b_\iota = -a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 + \{ |a_3 b_2| \iota_1 + |a_1 b_3| \iota_2 + |a_2 b_1| \iota_3 \}.$$

Lorsqu'on échange entre elles les lettres a et b, la partie réelle

$$(3)\qquad \mathfrak{S}\, a_\iota b_\iota = -a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$$

ne varie pas, tandis que la partie imaginaire

$$(4)\qquad \mathfrak{V}\, a_\iota b_\iota = |a_3 b_2| \iota_1 + |a_1 b_3| \iota_2 + |a_2 b_1| \iota_3$$

change de signe.

On a donc les deux équations

$$(5)\qquad \mathfrak{S}(a_\iota b_\iota) = \mathfrak{S}(b_\iota a_\iota),$$

$$(6)\qquad \mathfrak{V}(a_\iota b_\iota) = -\mathfrak{V}(b_\iota a_\iota),$$

c'est-à-dire que les deux produits de vecteurs $a_\iota b_\iota, b_\iota a_\iota$ sont conjugués (art. 508), en sorte que l'on a

(7) $$b_\iota a_\iota = \overline{a_\iota b_\iota}.$$

On voit, de plus, que les termes $a_0 b_\iota, b_0 a_\iota$ de la formule (3) étant essentiellement imaginaires, la partie réelle de AB se compose de

(8) $$\mathfrak{S} AB = a_0 b_0 + \mathfrak{S} a_\iota b_\iota,$$

expression qui ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs, de sorte que l'on a

(9) $$\mathfrak{S} AB = \mathfrak{S} BA.$$

520. En faisant, dans les formules précédentes, $B = A$, on a, pour le carré d'un quaternion,

(10) $$A^2 = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + 2a_0(a_1 \mathrm{i}_1 + a_2 \mathrm{i}_2 + a_3 \mathrm{i}_3).$$

Si l'on suppose $a_0 = 0$, on obtient l'expression du carré d'un vecteur

(11) $$a_\iota^2 = -a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = -(\mathfrak{T} a_\iota)^2.$$

Le carré d'un vecteur est donc égal à *moins* le carré de son module (art. 496).

On a, en général,

(12) $$(\mathfrak{T} A)^2 = a_0^2 + (\mathfrak{T} a_\iota)^2.$$

521. Le produit de deux quaternions conjugués,

$$A\overline{A} = (a_0 + a_\iota)(a_0 - a_\iota) = a_0^2 - a_\iota^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = (\mathfrak{T} A)^2,$$

est égal au carré du module (art. 452).

En ajoutant et soustrayant deux quaternions conjugués, on a (art. 461)

(13) $$A + \overline{A} = 2a_0,$$

(14) $$A - \overline{A} = 2a_\iota.$$

Donc la partie réelle et la partie imaginaire sont respectivement

égales à la demi-somme et à la demi-différence du quaternion et de son conjugué.

522. D'après ce que nous avons vu, le produit AB peut s'écrire

$$AB = a_0 b_0 + \mathfrak{S} a_i b_i + (a_0 b_i + b_0 a_i) + \mathfrak{V} a_i b_i .$$

Le conjugué de ce produit est donc

$$\overline{AB} = a_0 b_0 + \mathfrak{S} a_i b_i - (a_0 b_i + b_0 a_i) - \mathfrak{V} a_i b_i .$$

Or, on a, à cause de l'équation (7),

$$b_i a_i = \mathfrak{S} a_i b_i - \mathfrak{V} a_i b_i , \qquad \text{d'où} \qquad \mathfrak{V} b_i a_i = - \mathfrak{V} a_i b_i ;$$

donc

$$\overline{AB} = a_0 b_0 - (a_0 b_i + b_0 a_i) + \mathfrak{V} b_i a_i .$$

D'ailleurs

$$\overline{B}.\overline{A} = (b_0 - b_i)(a_0 - a_i) = a_0 b_0 + \mathfrak{S} b_i a_i - (a_0 b_i + b_0 a_i) + \mathfrak{V} b_i a_i .$$

On retrouve donc ainsi la formule de l'art. 510,

$$(15) \qquad \overline{A.B} = \overline{B}.\overline{A} .$$

523. Si l'on multiplie le produit $AB = C$ par son conjugué $\overline{AB} = \overline{C}$, on aura, en vertu de la propriété associative,

$$(16) \left\{ \begin{aligned} C\overline{C} &= (\mathfrak{T} C)^2 = AB.\overline{AB} = AB.\overline{B}\overline{A} = A.B\overline{B}.\overline{A} = A(\mathfrak{T} B)^2.\overline{A} \\ &= (\mathfrak{T} B)^2.A\overline{A} = (\mathfrak{T} B)^2.(\mathfrak{T} A)^2, \end{aligned} \right.$$

ou, en mettant pour les carrés des modules leurs valeurs,

$$(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 .$$

Donc le produit de deux sommes de quatre carrés peut se mettre sous la forme de la somme des carrés de quatre expressions rationnelles et entières des racines des premiers carrés, et déterminées par les formules (1) de l'art. 518.

La formule (16) exprime que le module du produit de deux quaternions est égal au produit des modules des deux facteurs (art. 505).

524. En divisant un quaternion par son module, on obtient son verseur,

$$(17)\qquad \mathfrak{U}A = \frac{A}{\mathfrak{T}A} = \frac{a_0 + a_1 \mathrm{I}_1 + a_2 \mathrm{I}_2 + a_3 \mathrm{I}_3}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

De même, en divisant le vecteur a_i par son module, on obtient le verseur du vecteur ou l'axe du quaternion,

$$(18)\qquad \mathrm{A} = \frac{a_i}{\mathfrak{T}a_i} = \frac{a_1 \mathrm{I}_1 + a_2 \mathrm{I}_2 + a_3 \mathrm{I}_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

D'après l'équation (11), on a

$$(19)\qquad \mathrm{A}^2 = -1.$$

Le carré d'un axe est donc égal à *moins* l'unité.

En posant (art. 495)

$$(20)\qquad \frac{a_0}{\mathfrak{T}A} = \cos\alpha, \qquad \frac{\mathfrak{T}a_i}{\mathfrak{T}A} = \sin\alpha,$$

le verseur (17) prendra la forme

$$\cos\alpha + \mathrm{A}\sin\alpha.$$

On pourra donc mettre un quaternion quelconque A sous la forme,

$$(21)\qquad A = \mathfrak{T}A.(\cos\alpha + \mathrm{A}\sin\alpha).$$

L'angle α est l'*argument* du quaternion ou du verseur.

Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $a_0 = 0$; le quaternion est rectangle et se réduit alors à son vecteur (art. 490).

525. Un quaternion, mis sous la forme *réduite* (21), jouit de propriétés analogues à celles d'une quantité complexe dans le plan. Ainsi, si A et A' sont deux quaternions de même axe A, et par suite coplanaires, on a, en vertu de la formule (19),

$$(22)\qquad \begin{cases} AA' = \mathfrak{T}A.\mathfrak{T}A'.(\cos\alpha + \mathrm{A}\sin\alpha)(\cos\alpha' + \mathrm{A}\sin\alpha') \\ \quad\;\; = \mathfrak{T}A.\mathfrak{T}A'.\{\cos(\alpha+\alpha') + \mathrm{A}\sin(\alpha+\alpha')\}, \end{cases}$$

avec une formule analogue pour le quotient $\frac{A}{A'}$.

On en tire, par le procédé connu, quel que soit l'exposant n,

(23) $$A^n = (\mathfrak{T}A)^n (\cos n\alpha + \text{A} \sin n\alpha).$$

526. Un verseur donné quelconque

$$\cos\alpha + \text{A}\sin\alpha$$

peut être identifié avec une puissance convenable n d'un verseur de même axe $\cos\beta + \text{A}\sin\beta$, en posant $\alpha = n\beta$, d'où

$$\cos\alpha + \text{A}\sin\alpha = \cos n\beta + \text{A}\sin n\beta = (\cos\beta + \text{A}\sin\beta)^n,$$

En particulier, si l'on prend $\beta = \frac{\pi}{2}$, on aura

$$\cos\beta + \text{A}\sin\beta = \text{A},$$

d'où $n = \frac{2}{\pi}\alpha$, et

$$\cos\alpha + \text{A}\sin\alpha = \text{A}^{\frac{2}{\pi}\alpha}.$$

$\frac{2}{\pi}\alpha$ représente la grandeur de l'argument α, évaluée en parties du quadrant. Pour simplifier l'écriture, ***nous conviendrons d'évaluer en parties du quadrant les arcs qui entreront en exposants,*** et nous aurons ainsi

(24) $$\cos\alpha + \text{A}\sin\alpha = \text{A}^{\alpha}.$$

Ainsi, tout verseur peut s'exprimer par une puissance de son axe dont l'exposant est égal à l'argument évalué en parties du quadrant.

De même, si l'on donne une biradiale quelconque,

$$A = \mathbf{a}(\cos\alpha + \text{A}\sin\alpha),$$

on pourra l'exprimer au moyen de la puissance α du vecteur $\mathbf{a}^{\frac{1}{\alpha}}\text{A}$, de sorte que

(25) $$A = \left(\mathbf{a}^{\frac{1}{\alpha}} A\right)^{\alpha}.$$

527. Tant qu'il s'agit de biradiales du même axe, c'est-à-dire de biradiales coplanaires, les puissances de vecteurs peuvent

se multiplier ou se diviser d'après les règles ordinaires de l'algèbre.

Mais il n'en est plus de même lorsqu'il s'agit de biradiales ou de verseurs d'axes différents, tels que

$$\cos\alpha + \text{A}\sin\alpha, \qquad \cos\beta + \text{B}\sin\beta.$$

En effet, le produit de deux vecteurs de direction différente A, B n'étant pas égal à -1 (art. 508), on n'aura plus de formule analogue à (22), qui permette de faire la multiplication par l'addition arithmétique des arguments; partant, en mettant les biradiales sous la forme (24) ou (25), le produit ne pourra plus s'obtenir par des additions d'exposants.

528. Au lieu de la forme (24), on pourrait prendre, pour représenter un verseur, la forme exponentielle

$$\cos\alpha + \text{A}\sin\alpha = e^{\alpha\text{A}},$$

que l'on pourrait employer conformément aux règles de l'algèbre ordinaire, dans le calcul des biradiales coplanaires, comme nous avons employé la forme $e^{\alpha i}$ pour les quantités complexes ordinaires.

Mais, quand on a en présence deux verseurs d'axes différents, si on les représentait par des exponentielles

$$e^{\alpha\text{A}}, \qquad e^{\beta\text{B}},$$

on ne pourrait plus appliquer la règle de l'addition des exposants. Car cette règle s'appuie sur les propriétés de la série qui définit l'exponentielle imaginaire, et sur l'identité qui en résulte pour les développements des expressions

$$e^u \times e^v \qquad \text{et} \qquad e^{u+v},$$

c'est-à-dire sur l'égalité identique

$$\left(\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{u^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{v^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(u+v)^n}{n!}.$$

Or cette identité est fondée sur la formule du binôme, laquelle

n'est plus vraie dans le cas où la multiplication cesse d'être commutative. Car on a alors, par exemple,

$$(u+v)^2 = u^2 + uv + vu + v^2,$$

qui ne se réduit pas à $u^2 + 2uv + v^2$, et il en est de même pour les autres puissances. On ne peut donc plus poser dans ce cas $e^u . e^v = e^{u+v}$.

§ III.

Division des biradiales.

529. Nous avons vu que le produit de deux biradiales conjuguées est égal au carré de leur module commun, de sorte que, si $\mathbf{a}$ est le module de la biradiale A, on a

$$A.\bar{A} = \bar{A}.A = \mathbf{a}^2.$$

En divisant par $\mathbf{a}^2$ les deux membres de cette égalité, il vient

$$A.\frac{\bar{A}}{\mathbf{a}^2} = \frac{\bar{A}}{\mathbf{a}^2}.A = 1.$$

Donc les deux biradiales A et $\frac{\bar{A}}{\mathbf{a}^2}$ ont pour produit l'unité, dans quelqu'ordre qu'on place les facteurs, et par suite chacune d'elle devra être considérée comme le quotient de l'unité divisée par l'autre, soit que l'on définisse le quotient comme le premier ou comme le second facteur du dividende.

On aura, d'après cela, pour la quantité ***réciproque*** de A (art. 379),

$$(1) \qquad \frac{1}{A} = A^{-1} = \frac{\bar{A}}{(\mathfrak{T}A)^2}.$$

De là on conclut facilement que, si l'on prend pour dividende, au lieu de l'unité, une quantité numérique quelconque $\mathfrak{g}$, le quotient X, défini par l'une ou l'autre des égalités

$$A.X = \mathfrak{g}, \qquad X.A = \mathfrak{g},$$

qui peuvent s'écrire

$$\frac{A}{\mathfrak{g}}.X=1, \qquad X.\frac{A}{\mathfrak{g}}=1,$$

aura, dans les deux cas, pour valeur

$$(2) \qquad X=\left(\frac{A}{\mathfrak{g}}\right)^{-1}=\mathfrak{g}.A^{-1}=\frac{\mathfrak{g}}{(\mathfrak{T}A)^2}.\mathfrak{C}A.$$

L'interprétation géométrique de ces formules est évidente.

530. Considérons maintenant le problème général de l'inversion de la multiplication. Il consiste, étant donné un produit et l'un de ses facteurs, à trouver l'autre facteur. Mais ici, la multiplication n'étant pas commutative, il n'est pas indifférent que ce soit le premier ou le second facteur qui soit inconnu. On aura donc deux problèmes distincts à résoudre, suivant que le facteur inconnu X devra satisfaire à l'une ou à l'autre des équations

$$(3) \qquad B.X=A,$$

$$(4) \qquad X.B=A.$$

Pour résoudre l'équation (3), on opèrera sur les deux membres par $B^{-1}\times$, ce qui donnera, en vertu de la propriété associative et de l'égalité $B^{-1}\times B=1$,

$$(5) \qquad X=B^{-1}.A=\frac{\mathfrak{C}B}{(\mathfrak{T}B)^2}.A.$$

Pour résoudre l'équation (4), on opèrera par $\times B^{-1}$, et l'on aura

$$X=A.B^{-1}=A.\frac{\mathfrak{C}B}{(\mathfrak{T}B)^2}.$$

On voit que, dans les deux cas, l'inversion de la multiplication est toujours possible, et se ramène à une autre multiplication, dont les facteurs sont le produit donné et le réciproque du facteur connu.

531. Nous pourrions donner le nom de *division* soit à l'un,

soit à l'autre de ces deux problèmes d'inversion de la multiplication. Cependant, pour rester d'accord avec les conventions adoptées précédemment, et conserver l'analogie dans les résultats, c'est le premier problème, celui de la résolution de l'équation (3), que nous prendrons comme définition de la division. Ainsi la division des biradiales sera définie par la relation

(6) dividende = diviseur $\times$ quotient.

D'après cela, si LON est le produit donné ou le *dividende,* LOM le facteur donné ou le *diviseur,* les deux biradiales étant supposées ramenées *au même vecteur initial,* le quotient sera la biradiale MON, formée par les vecteurs terminaux des deux termes de la division.

On aura donc, pour trouver le quotient, la règle exprimée par l'égalité

$$(7)\quad \begin{cases} \text{quotient} = \text{réciproque du diviseur} \times \text{dividende} \\ \qquad\quad = \dfrac{\text{conjugué du diviseur}}{(\text{module du diviseur})^2} \times \text{dividende}. \end{cases}$$

532. Si l'on représente le dividende par $A = \mathbf{a}_\alpha$, le diviseur par $\mathbf{b}_\beta$ et le quotient par $X = \mathbf{x}_\xi$, on aura, par définition,

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{b}_\beta . \mathbf{x}_\xi = (\mathbf{bx})_{\beta+\xi},$$

d'où l'on conclut

$$\mathbf{a} = \mathbf{bx}, \qquad \mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}};$$

ensuite, + indiquant l'addition sphérique,

$$\alpha = \beta + \xi,$$

d'où, en opérant par $-\beta$ (premier terme) sur les deux membres de l'égalité, et se rappelant que l'addition sphérique est associative,

$$-\beta + \alpha = -\beta + \beta + \xi = \xi.$$

Donc le module du quotient est égal au module du divi-

dende divisé par celui du diviseur, et son argument est égal à la somme de *moins* l'argument du diviseur, *plus* l'argument du dividende; c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{\mathbf{a}_\alpha}{\mathbf{b}_\beta} = \left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)_{-\beta+\alpha}. \tag{8}$$

Ainsi, en faisant abstraction des modules, le quotient $\frac{\text{LON}}{\text{LOM}}$ s'obtient en ajoutant l'argument $\text{ML} = -\text{LM}$ (1er terme) à LN (2e terme), ce qui donne $\text{ML} + \text{LN} = \text{MN}$, de sorte que le quotient est $\text{MOL} \times \text{LON} = \text{MON}$. En effet, on a bien, conformément à la définition (6),

$$\text{LOM} \times \text{MON} = \text{LON}.$$

533. Si le dividende est égal à l'unité, et que l'on pose

$$1 = \mathbf{b}_\beta . \mathbf{x}_\xi = (\mathbf{bx})_{\beta+\xi},$$

on en conclut

$$\mathbf{bx} = 1, \qquad \beta + \xi = 0,$$

d'où, en se rappelant la définition des quantités réciproques (art. 379), le *module* de l'addition sphérique étant 0,

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\mathbf{b}}, \qquad \xi = -\beta + 0 = -\beta.$$

Donc

$$\frac{1}{\mathbf{b}_\beta} = \mathbf{x}_\xi = \left(\frac{1}{\mathbf{b}}\right)_{-\beta}.$$

Dans ce cas, où le produit est réel, les deux biradiales B et $\frac{1}{B}$ étant situées dans le même plan, la multiplication est commutative; de sorte que l'on a aussi (art. 379)

$$1 = \mathbf{x}_\xi \mathbf{b}_\beta, \qquad \mathbf{b}_\beta = \frac{1}{\mathbf{x}_\xi}.$$

On voit par là que l'expression (8) a la même valeur que l'expression

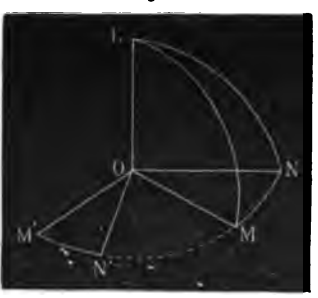
$$\frac{1}{\mathbf{b}_\beta} . \mathbf{a}_\alpha = \left(\frac{1}{\mathbf{b}} . \mathbf{a}\right)_{-\beta+\alpha},$$

ce qui résultait immédiatement de la formule (5) ou

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{B} . A.$$

534. Soit L (*fig.* 74) le pôle d'un arc de grand cercle quelconque MN. La biradiale MON sera le quotient $\frac{LON}{LOM}$ des deux biradiales rectangles LON, LOM, ou des deux vecteurs ou axes ON', OM', qui équivalent à ces biradiales. Or ces deux vecteurs sont dans le plan MON. Leur rapport en grandeur $\frac{ON'}{OM'} = \frac{ON}{OM}$, et leur angle M'ON' = MON. Donc ils forment une biradiale identique à MON, et par suite ***une biradiale est égale au rapport des deux vecteurs qui la forment, considérés en grandeur et en position.***

Fig. 74.



On peut donc, au lieu de la notation MON, employer pour désigner la même biradiale la notation $\frac{ON}{OM}$ du rapport du vecteur final au vecteur initial, ce qui est une généralisation de la notation que nous avons employée dans la théorie des biradiales coplanaires.

535. D'après cette notation, les équations établies dans les art. 492 et 502 deviennent, en désignant par L, M, N les vecteurs OL, OM, ON,

$$\frac{M}{L} + \frac{N}{L} = \frac{M + N}{L},$$

$$\frac{M}{L} \times \frac{N}{M} = \frac{N}{L}.$$

536. Un vecteur pouvant être considéré comme une biradiale rectangle, on aura (art. 530)

$$\frac{M}{L} = \frac{1}{L} M = \frac{1}{(\mathfrak{T}L)^2} . \bar{L} . M,$$

ou, à cause de $\bar{L} = -L$ (art. 491 et 509),

$$\frac{M}{L} = -\frac{1}{(\mathfrak{T}L)^2} . L . M.$$

On a d'ailleurs (art. 510)

$$\overline{\text{LM}} = \overline{\text{M}}.\overline{\text{L}} = (-\text{M}).(-\text{L}) = \text{M}.\text{L}.$$

Donc

$$\mathfrak{C}\frac{\text{M}}{\text{L}} = -\frac{1}{(\mathfrak{T}\text{L})^2}\,\text{M}.\text{L}.$$

On passe ainsi d'une biradiale à sa conjuguée, en intervertissant les facteurs dans le produit L.M des vecteurs (art. 509).

537. Supposons maintenant les biradiales données sous la forme de quaternions. Soient

$$A = a_0 + a_1 \text{I}_1 + a_2 \text{I}_2 + a_3 \text{I}_3,$$
$$B = b_0 + b_1 \text{I}_1 + b_2 \text{I}_2 + b_3 \text{I}_3;$$

proposons-nous de calculer le quotient

$$\frac{A}{B} = X = x_0 + x_1 \text{I}_1 + x_2 \text{I}_2 + x_3 \text{I}_3.$$

En substituant pour X son expression dans l'égalité

$$A = BX,$$

et développant le produit (art. 518), il vient, par l'identification des deux membres,

$$b_0 x_0 - b_1 x_1 - b_2 x_2 - b_3 x_3 = a_0,$$
$$b_1 x_0 + b_0 x_1 + b_3 x_2 - b_2 x_3 = a_1,$$
$$b_2 x_0 - b_3 x_1 + b_0 x_2 + b_1 x_3 = a_2,$$
$$b_3 x_0 + b_2 x_1 - b_1 x_2 + b_0 x_3 = a_3.$$

Si l'on ajoute ces équations, après les avoir multipliées respectivement par les coefficients 1° de x_0, 2° de x_1, 3° de x_2, 4° de x_3 dans chacune d'elles, il vient, en remplaçant $b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$ par $(\mathfrak{T}B)^2$,

$$(\mathfrak{T}B)^2 x_0 = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \Sigma a b,$$
$$(\mathfrak{T}B)^2 x_1 = a_1 b_0 - a_0 b_1 + a_3 b_2 - a_2 b_3 = |a_1 b_0| + |a_3 b_2|,$$
$$(\mathfrak{T}B)^2 x_2 = a_2 b_0 - a_3 b_1 - a_0 b_2 + a_1 b_3 = |a_2 b_0| + |a_1 b_3|,$$
$$(\mathfrak{T}B)^2 x_3 = a_3 b_0 + a_2 b_1 - a_1 b_2 - a_0 b_3 = |a_3 b_0| + |a_2 b_1|.$$

On aurait encore pu obtenir ces formules en multipliant par A le conjugué de B (art. 530).

On voit que la valeur de X est déterminée et finie toutes les fois que le module $\mathfrak{T}B$ du diviseur n'est pas nul, et par suite toutes les fois que les valeurs réelles des composantes b_0, b_1, b_2, b_3 du diviseur ne sont pas toutes nulles. Ainsi la division est une opération *uniforme* toutes les fois que le diviseur ne s'annule pas. Il ne pourrait en être autrement que si l'on admettait, pour les coefficients a_0, a_1, a_2, a_3, des valeurs complexes de la forme $p+q\sqrt{-1}$.

538. En faisant $a_0=0$, $b_0=0$, $a_i=\text{A}$, $b_i=\text{B}$ dans ces formules, on aura l'expression de la biradiale ou du quaternion $X=\frac{\text{A}}{\text{B}}$, formé par les vecteurs

$$\text{A}=a_1\iota_1+a_2\iota_2+a_3\iota_3,\qquad \text{B}=b_1\iota_1+b_2\iota_2+b_3\iota_3,$$

savoir, $(\mathfrak{T}\text{B})^2$ étant égal à $b_1^2+b_2^2+b_3^2$,

$$(\mathfrak{T}\text{B})^2 X=(\mathfrak{T}\text{B})^2.\frac{\text{A}}{\text{B}}=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$$
$$+|a_3b_2|\iota_1+|a_1b_3|\iota_2+|a_2b_1|\iota_3$$

Pour déterminer les divers éléments de la biradiale X, nous aurons les équations

$$(\mathfrak{T}\text{B})^4(\mathfrak{T}X)^2=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2+|a_3b_2|^2+|a_1b_3|^2+|a_2b_1|^2$$
$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)=(\mathfrak{T}\text{A})^2(\mathfrak{T}\text{B})^2,$$

d'où (art. 532 et 496)

$$\mathfrak{T}X=\mathfrak{T}\frac{\text{A}}{\text{B}}=\frac{\mathfrak{T}\text{A}}{\mathfrak{T}\text{B}},$$

$$\cos\xi=\frac{\mathfrak{S}X}{\mathfrak{T}X}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{(\mathfrak{T}\text{B})^2\,\mathfrak{T}X}=\frac{\Sigma ab}{\mathfrak{T}\text{A}.\mathfrak{T}\text{B}},$$

$$\sin\xi=\frac{\mathfrak{T}\mathfrak{V}X}{\mathfrak{T}X}=\frac{\sqrt{|a_3b_2|^2+|a_1b_3|^2+|a_2b_1|^2}}{(\mathfrak{T}\text{B})^2\,\mathfrak{T}X}=\frac{\sqrt{(\mathfrak{T}\text{A})^2(\mathfrak{T}\text{B})^2-(\Sigma ab)^2}}{\mathfrak{T}\text{A}.\mathfrak{T}\text{B}}.$$

On en conclut que la biradiale est rectangle, si l'on a

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0.$$

Elle sera ***numérique***, les deux vecteurs coïncidant ou étant parallèles, si l'on a

$$a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3.$$

§ IV.

Transformations diverses, relatives aux produits et aux quotients de biradiales et de vecteurs.

539. Indiquons maintenant certaines transformations importantes des égalités entre des produits de biradiales.

Si l'on a une équation de la forme

$$AB = CD,$$

on pourra faire disparaître un facteur de l'un des membres, en le remplaçant dans l'autre par son conjugué. Si l'on opère, en effet, sur les deux membres par $\bar{A}\times$, il vient, à cause de $\bar{A}A = (\mathfrak{T}A)^2$,

$$(\mathfrak{T}A)^2 B = \bar{A}CD, \quad \text{ou} \quad B = \frac{1}{(\mathfrak{T}A)^2}\bar{A}CD,$$

le facteur A ayant disparu du premier membre.

Si l'on opère, au contraire, par $\times\bar{B}$, il vient

$$A(\mathfrak{T}B)^2 = CD\bar{B}, \quad \text{ou} \quad A = \frac{1}{(\mathfrak{T}B)^2}CD\bar{B}.$$

On s'y prendrait de même pour faire disparaître les facteurs du second membre.

Ainsi, ***dans une égalité de deux produits de biradiales, on peut effacer le premier (ou le dernier) facteur d'un membre, en introduisant son conjugué (divisé par le carré du module) comme premier (ou dernier) facteur dans l'autre membre, ou,*** ce qui revient au même (art. 530), ***en écrivant son réciproque dans l'autre membre,***

au même rang que le facteur occupait dans le membre où il se trouvait d'abord.

540. Si l'on suppose, par exemple, que A, B, C, D soient des biradiales unitaires, représentant les côtés d'un polygone sphérique fermé PQRSP, la somme sphérique des côtés du polygone, parcourus dans un sens constant, étant nulle, le produit des biradiales, qui ramène le rayon initial à son point de départ, sera égal à l'unité. On aura donc, dans ce cas,

$$ABCD = 1.$$

En transformant cette égalité comme on l'a indiqué dans l'article précédent, et remarquant que les modules $\mathfrak{T}A, \mathfrak{T}B, \ldots$ sont tous égaux à l'unité, on en tirera les égalités suivantes :

$$\begin{array}{ll} BCD = \overline{A}, & ABC = \overline{D}, \\ CD = \overline{B}\overline{A}, & AB = \overline{D}\overline{C}, \\ D = \overline{C}\overline{B}\overline{A}, & A = \overline{D}\overline{C}\overline{B}, \\ 1 = \overline{D}\overline{C}\overline{B}\overline{A}, & BC = \overline{D}\overline{A}, \text{ etc.} \end{array}$$

541. Soit à trouver une biradiale X telle que l'on ait

$$A = \frac{B}{X}, \quad \text{ou} \quad XA = B,$$

le facteur inconnu étant ici le *premier* facteur, et non le *second*, comme dans la division telle que nous l'avons définie (art. 531). En opérant sur les deux membres de l'équation par $\times \overline{A}$, nous avons trouvé (art. 530)

$$X = \frac{B\overline{A}}{(\mathfrak{T}A)^2}.$$

De même, l'équation

$$AXB = C$$

donnerait

$$X = \frac{\overline{A}C\overline{B}}{(\mathfrak{T}A)^2\,(\mathfrak{T}B)^2}.$$

542. Si l'on applique à la multiplication et à son inverse, la

division, les résultats généraux établis dans le Chapitre Ier (art. 374, 375, 376, 380), nous obtiendrons les formules de transformation suivantes :

$$\frac{B}{C}.A = \frac{BA}{C} = \frac{A}{\left(\frac{C}{B}\right)},$$

$$\frac{\left(\frac{A}{B}\right)}{C} = \frac{A}{BC},$$

que l'on aurait pu obtenir en remplaçant l'opération de la division par C par l'opération $\frac{1}{C}\times$, et remarquant que $\frac{C}{B}$ est le réciproque de $\frac{B}{C}$.

Ces formules donnent encore

$$\frac{B}{A}.\frac{C}{B} = \frac{1}{A}.B.\frac{1}{B}.C = \frac{1}{A}.C = \frac{C}{A},$$

ce qui n'est autre chose que la formule de l'art. 502.

Mais on n'a pas généralement $\frac{A}{B}.B = A$, la multiplication n'étant pas commutative.

543. Soient A, B deux vecteurs unitaires, ou deux verseurs rectangles, et soit $\frac{\text{A}}{\text{B}} = Q$ la biradiale formée par ces vecteurs. Deux vecteurs conjugués étant égaux et de signe contraire (art. 491), on a $\bar{\text{A}} = -\text{A}$, $\bar{\text{B}} = -\text{B}$. Cela posé, de l'équation

$$(\text{A}) \qquad \text{A} = \text{B}Q$$

on tire, en opérant par $\bar{\text{B}}\times$, les égalités

$$\bar{\text{B}}\text{A} = Q = -\text{BA} = \text{B}\bar{\text{A}},$$

puis, en opérant par $\times\,\bar{Q}$ sur la même égalité (A), et ensuite par $\bar{\text{A}}\times$,

$$\text{A}\bar{Q} = \text{B}, \quad \text{d'où} \quad \bar{Q} = \bar{\text{A}}\text{B} = -\text{AB},$$

d'où l'on voit que les produits BA et AB sont égaux à deux biradiales conjuguées $-Q, -\overline{Q}$ (art. 536). On a encore

$$Q\text{A} = \text{B}, \quad \text{A} = \overline{Q}\text{B}.$$

En appliquant à toutes ces égalités de produits la définition de la division (art. 429), on a les nouvelles égalités

$$\frac{Q}{\text{B}} = -\text{A}, \quad \frac{\text{B}}{\text{A}} = \overline{Q} = \mathfrak{C}\frac{\text{A}}{\text{B}}, \quad \frac{\text{B}}{\overline{Q}} = \text{A},$$

$$\frac{\text{A}}{\overline{Q}} = \text{B}, \quad \frac{\overline{Q}}{\text{A}} = -\text{B}.$$

544. Éclaircissons ce qui précède par quelques applications numériques.

Soient les deux vecteurs

$$\text{A} = 2\text{I}_1 + 4\text{I}_2 - \text{I}_3, \qquad \text{B} = 2\text{I}_1 + \text{I}_2 + 2\text{I}_3.$$

On a d'abord

$$(\mathfrak{T}\text{A})^2 = 21, \quad (\mathfrak{T}\text{B})^2 = 9, \quad \text{d'où} \quad \mathfrak{T}(\text{AB}) = 3\sqrt{21}, \quad \mathfrak{T}\frac{\text{A}}{\text{B}} = \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Pour calculer le produit BA, on multipliera les deux polynômes par les règles ordinaires de l'algèbre, en ayant soin de ne pas transposer les facteurs dans la multiplication des unités imaginaires, et observant les règles établies dans les art. 499 et 500. On pourra disposer le calcul comme il suit, chaque ligne horizontale contenant les produits par un même terme du multiplicande,

$$\begin{array}{rr|r|r|l} \text{BA} = & -4 & \text{I}_1 - 2 & \text{I}_2 - 8 & \text{I}_3 = -6 + 9\text{I}_1 - 6\text{I}_2 - 6\text{I}_3. \\ & -4 + 1 & & +2 & \\ & +2 + 8 & -4 & & \end{array}$$

Donc (art. 536) la biradiale formée par ces deux vecteurs sera

$$C = \frac{\text{A}}{\text{B}} = -\frac{\text{BA}}{(\mathfrak{T}\text{B})^2} = \frac{1}{3}(2 - 3\text{I}_1 + 2\text{I}_2 + 2\text{I}_3).$$

On a ensuite

$$\mathfrak{T}C = \sqrt{\frac{7}{3}}, \quad c_0 = \frac{2}{3}, \quad \mathfrak{T}c_i = \frac{\sqrt{12}}{3},$$

d'où, pour déterminer l'argument γ,

$$\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{21}}, \qquad \sin\gamma = \sqrt{\frac{17}{21}}.$$

Soit maintenant une autre biradiale

$$D = 2 + \iota_1 - \iota_3 ;$$

cherchons une biradiale X, telle que l'on ait

$$D = \frac{\mathrm{B}}{X} = \frac{1}{X}\mathrm{B} = \frac{\overline{X}}{(\mathfrak{T}X)^2}\mathrm{B}, \quad \text{ou} \quad XD = \mathrm{B}.$$

On a (art. 541)

$$X = \frac{\mathrm{B}\overline{D}}{(\mathfrak{T}D)^2} = \frac{1}{6}(2\iota + \iota_2 + 2\iota_3)(2 - \iota_1 + \iota_3)$$
$$= \frac{1}{2}(\iota_1 + 2\iota_2 + \iota_3).$$

On voit que X est une biradiale rectangle ou un vecteur, de sorte que X et B sont les deux vecteurs qui comprennent la biradiale D.

On a ensuite, comme on le vérifie en effectuant les calculs,

$$\frac{\mathrm{B}}{X}\cdot\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = DC = (2 + \iota_1 - \iota_3)\cdot\frac{1}{3}(2 - 3\iota_1 + 2\iota_2 + 2\iota_3) = 3 - 2\iota_1 + \iota_2$$
$$= \frac{\mathrm{A}}{X} = \frac{\overline{X}}{(\mathfrak{T}X)^2}\mathrm{A} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\iota_1 + 2\iota_2 + \iota_3)(2\iota_1 + 4\iota_2 - \iota_3) = E.$$

Si l'on pose maintenant

$$\frac{E}{D} = F,$$

on aura

$$E = DF,$$
$$\overline{D}E = (\mathfrak{T}D)^2 F = 6F = (2 - \iota_1 + \iota_3)(3 - 2\iota_1 + \iota_2)$$
$$= 4 - 6\iota_1 + 4\iota_2 + 4\iota_3,$$

d'où

$$\frac{E}{D} = \frac{1}{3}(2 - 3\iota_1 + 2\iota_2 + 2\iota_3) = \frac{1}{D}.DC = C.$$

Soit enfin

$$\frac{E}{C} = G.$$

On a, à cause de $(\mathfrak{T}C)^2 = \frac{21}{9}$,

$$\frac{21}{9} G = \breve{C}E = \frac{1}{3}(2 + 3\iota_1 - 2\iota_2 - 2\iota_3)(3 - 2\iota_1 + \iota_2)$$
$$= \frac{1}{3}(14 + 3\iota_1 - 8\iota_2 - 5\iota_3),$$

d'où

$$G = \frac{E}{C} = \frac{DC}{C} = \frac{1}{C} DC = \frac{1}{7}(14 + 3\iota_1 - 8\iota_2 - 5\iota_3),$$

valeur qui diffère de D, à cause de la non-commutativité de la multiplication.

545. Nous allons maintenant établir quelques transformations fondamentales, relatives aux produits de vecteurs.

$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \ldots$ étant des vecteurs quelconques, on a (art. 510)

$$\overline{\mathrm{AB}} = \bar{\mathrm{B}}.\bar{\mathrm{A}} = (-\mathrm{B}).(-\mathrm{A}) = (-1)^2 \mathrm{BA},$$

d'où l'on conclut d'abord

(1) $$\mathfrak{S}\mathrm{BA} = \mathfrak{S}\mathrm{AB}, \qquad \mathfrak{V}\mathrm{BA} = -\mathfrak{V}\mathrm{AB}.$$

Ensuite

$$\overline{\mathrm{ABC}} = \bar{\mathrm{C}}.\overline{\mathrm{AB}} = \bar{\mathrm{C}}\bar{\mathrm{B}}\bar{\mathrm{A}} = (-1)^3 \mathrm{CBA};$$

et de même, si les vecteurs $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{G}, \mathrm{H}$ sont au nombre de n,

(2) $$\mathfrak{C}\mathrm{AB}\ldots\mathrm{GH} = (-1)^n \mathrm{HG}\ldots\mathrm{BA}.$$

Des égalités précédentes et des formules (13) et (14) de l'art. 521 on tire

(3) $$\begin{cases} 2\mathfrak{S}\mathrm{AB} = \mathrm{AB} + \mathrm{BA}, \\ 2\mathfrak{S}\mathrm{ABC} = \mathrm{ABC} - \mathrm{CBA}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2\mathfrak{S}\mathrm{AB}\ldots\mathrm{GH} = \mathrm{AB}\ldots\mathrm{GH} + (-1)^n \mathrm{HG}\ldots\mathrm{BA}; \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} 2\mathfrak{V}\mathrm{AB} = \mathrm{AB} - \mathrm{BA}, \\ 2\mathfrak{V}\mathrm{ABC} = \mathrm{ABC} + \mathrm{CBA}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 2\mathfrak{V}\mathrm{AB}\dots\mathrm{GH} = \mathrm{AB}\dots\mathrm{GH} - (-1)^n\,\mathrm{HG}\dots\mathrm{AB}. \end{cases}$$

546. En décomposant BC en $\mathfrak{S}\mathrm{BC} + \mathfrak{V}\mathrm{BC}$, on a

$$\mathrm{ABC} = \mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} + \mathrm{A}.\mathfrak{V}\mathrm{BC}.$$

Or le produit $\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BC}$ d'un vecteur par un nombre étant un vecteur, c'est l'autre terme $\mathfrak{V}\mathrm{AB.C}$ qui peut seul fournir la partie réelle du produit ABC. On a donc

$$(5)\qquad \mathfrak{S}\mathrm{ABC} = \mathfrak{S}(\mathrm{A}.\mathfrak{V}\mathrm{BC}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{V}\mathrm{BC.A}).$$

De même

$$\mathfrak{S}\mathrm{ACB} = \mathfrak{S}(\mathrm{A}.\mathfrak{V}\mathrm{CB}),$$

et comme [éq. (1)] $\mathfrak{V}\mathrm{CB} = -\mathfrak{V}\mathrm{BC}$, on en conclut

$$(6)\qquad \mathfrak{S}\mathrm{ABC} = -\mathfrak{S}\mathrm{ACB}.$$

On trouverait pareillement

$$(7)\quad \begin{cases} \mathfrak{S}\mathrm{ABC} = +\mathfrak{S}\mathrm{BCA} = +\mathfrak{S}\mathrm{CAB} \\ = -\mathfrak{S}\mathrm{ACB} = -\mathfrak{S}\mathrm{BAC} = -\mathfrak{S}\mathrm{CBA}. \end{cases}$$

On voit que la partie réelle du produit de trois vecteurs $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ ne change pas de valeur absolue lorsqu'on intervertit l'ordre des facteurs, mais qu'elle change de signe suivant une loi analogue à celle qui régit les signes des termes d'un déterminant.

547. On a ensuite [éq. (4)]

$$2\mathfrak{V}(\mathrm{A}.\mathfrak{V}\mathrm{BC}) = \mathrm{A}.\mathfrak{V}\mathrm{BC} - \mathfrak{V}\mathrm{BC.A}.$$

En ajoutant à cette égalité l'identité

$$0 = \mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} - \mathfrak{S}\mathrm{BC.A},$$

il vient

$$(8)\qquad 2\mathfrak{V}(\mathrm{A}.\mathfrak{V}\mathrm{BC}) = \mathrm{ABC} - \mathrm{BCA}.$$

Si l'on a maintenant égard à l'identité

$$\text{ABC} - \text{BCA} = (\text{AB} + \text{BA})\text{C} - \text{B}(\text{AC} + \text{CA}),$$

ainsi qu'à la première des formules (3), l'égalité (8) deviendra

(9) $$\mathfrak{V}(\text{A}.\mathfrak{V}\text{BC}) = \text{C}.\mathfrak{S}\text{AB} - \text{B}.\mathfrak{S}\text{AC}.$$

En ajoutant cette égalité à l'identité

$$\mathfrak{V}(\text{A}.\mathfrak{S}\text{BC}) = \text{A}.\mathfrak{S}\text{BC},$$

on a l'égalité importante

(10) $$\mathfrak{V}\text{ABC} = \text{A}.\mathfrak{S}\text{BC} - \text{B}.\mathfrak{S}\text{AC} + \text{C}.\mathfrak{S}\text{AB}.$$

Échangeons maintenant entre elles les lettres B et C, en tenant compte de la formule (1), il viendra

$$\mathfrak{V}\text{ACB} = \text{A}.\mathfrak{S}\text{BC} + \text{B}.\mathfrak{S}\text{AC} - \text{C}.\mathfrak{S}\text{AB},$$

d'où l'on tire

(11) $$2\text{A}.\mathfrak{S}\text{BC} = \mathfrak{V}\text{ABC} + \mathfrak{V}\text{ACB}.$$

La seconde équation (4), dont le second membre n'est pas altéré par l'échange des lettres A et C, donne

(12) $$\mathfrak{V}\text{ABC} = \mathfrak{V}\text{CBA}.$$

548. De la formule (9) on tire, en vertu des formules (1),

$$\mathfrak{V}(\text{B}.\mathfrak{V}\text{CA}) = \text{A}.\mathfrak{S}\text{BC} - \text{C}.\mathfrak{S}\text{AB},$$
$$\mathfrak{V}(\text{C}.\mathfrak{V}\text{AB}) = \text{B}.\mathfrak{S}\text{AC} - \text{A}.\mathfrak{S}\text{BC}.$$

En ajoutant ces égalités à l'égalité (9), on en tire

$$\mathfrak{V}(\text{A}.\mathfrak{V}\text{BC}) + \mathfrak{V}(\text{B}.\mathfrak{V}\text{CA}) + \mathfrak{V}(\text{C}.\mathfrak{V}\text{AB}) = 0.$$

Les égalités (5), (7) et (1) donnent d'ailleurs

$$\mathfrak{S}(\text{A}.\mathfrak{V}\text{BC}) + \mathfrak{S}(\text{B}.\mathfrak{V}\text{CA}) + \mathfrak{S}(\text{C}.\mathfrak{V}\text{AB}) = 3\mathfrak{S}\text{ABC}.$$

En ajoutant cette dernière égalité à la précédente, il vient

(13) $$\text{A}.\mathfrak{V}\text{BC} + \text{B}.\mathfrak{V}\text{CA} + \text{C}.\mathfrak{V}\text{AB} = 3\mathfrak{S}\text{ABC}.$$

549. L'égalité (9) donne, en remplaçant A par $\mathfrak{V}_{AB}$ et $\mathfrak{V}_{BC}$ par $\mathfrak{V}_{CD}$,

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{V}_{AB}.\mathfrak{V}_{CD}) = D.\mathfrak{S}(\mathfrak{V}_{AB}.C) - C.\mathfrak{S}(\mathfrak{V}_{AB}.D),$$

et par suite [éq. (5)],

(13) $$\mathfrak{V}(\mathfrak{V}_{AB}.\mathfrak{V}_{CD}) = D.\mathfrak{S}_{ABC} - C.\mathfrak{S}_{ABD}.$$

De même

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{V}_{CD}.\mathfrak{V}_{BA}) = A.\mathfrak{S}_{CDB} - B.\mathfrak{S}_{CDA},$$

et comme $\mathfrak{V}_{BA} = -\mathfrak{V}_{AB}$; d'où

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{V}_{AB}.\mathfrak{V}_{CD}) = -\mathfrak{V}(\mathfrak{V}_{BA}.\mathfrak{V}_{CD}) = +\mathfrak{V}(\mathfrak{V}_{CD}.\mathfrak{V}_{BA}),$$

il en résulte

(14) $$D.\mathfrak{S}_{ABC} - A.\mathfrak{S}_{CDB} + B.\mathfrak{S}_{.CDA} - C.\mathfrak{S}_{ABD} = 0.$$

En remplaçant D par X, et ayant égard aux égalités (7), on a cette formule, d'une grande utilité,

(15) $$X.\mathfrak{S}_{ABC} = A.\mathfrak{S}_{BCX} + B.\mathfrak{S}_{CAX} + C.\mathfrak{S}_{ABX}.$$

550. Les trois vecteurs $\mathfrak{V}_{BC}$, $\mathfrak{V}_{CA}$, $\mathfrak{V}_{AB}$ n'étant pas généralement coplanaires, on peut décomposer suivant leurs trois directions un vecteur quelconque X, de sorte que l'on peut poser, α, β, γ étant des quantités numériques,

$$X = \alpha.\mathfrak{V}_{BC} + \beta.\mathfrak{V}_{CA} + \gamma.\mathfrak{V}_{AB}.$$

On a alors (5), en opérant par $\mathfrak{S}.A\times$, c'est-à-dire multipliant par A premier facteur, et égalant ensuite les parties réelles des deux membres,

$$\mathfrak{S}_{AX} = \alpha.\mathfrak{S}_{ABC},$$

à cause de $\mathfrak{S}(A.\mathfrak{V}_{CA}) = \mathfrak{S}_{ACA} = -\mathfrak{S}_{CA^2} = 0$, A^2 étant un nombre réel, et de même $\mathfrak{S}(A.\mathfrak{V}_{AB}) = 0$. Pareillement,

$$\mathfrak{S}_{BX} = \beta.\mathfrak{S}_{ABC},$$
$$\mathfrak{S}_{CX} = \gamma.\mathfrak{S}_{ABC}.$$

On tire de là les valeurs de α, β, γ, ce qui donne

$$(16)\qquad \mathrm{x}.\mathfrak{S}\mathrm{ABC} = \mathfrak{S}\mathrm{XA}.\mathfrak{V}\mathrm{BC} + \mathfrak{S}\mathrm{XB}.\mathfrak{V}\mathrm{CA} + \mathfrak{S}\mathrm{XC}.\mathfrak{V}\mathrm{AB}.$$

551. Si l'on suppose les trois vecteurs A, B, C exprimés au moyen de leurs composantes rectangulaires, sous la forme

$$a_1 \mathrm{I}_1 + a_2 \mathrm{I}_2 + a_3 \mathrm{I}_3 = \Sigma a\mathrm{I}, \text{ etc.},$$

on aura (art. 538)

$$\mathrm{ABC} = \Sigma a\mathrm{I}.\Sigma b\mathrm{I}.\Sigma c\mathrm{I} = -\,|a_1 b_2 c_3| + A_1 \mathrm{I}_1 + A_2 \mathrm{I}_2 + A_3 \mathrm{I}_3,$$

en posant

$$A_1 = -\,c_1 \Sigma ab + |a_2 b_1| c_2 - |a_1 b_2| c_3, \text{ etc.}$$

On conclut de là

$$(17)\qquad \mathfrak{S}\mathrm{ABC} = -\,|a_1 b_2 c_3|,$$

ce qui est l'expression du volume du parallélépipède qui a pour arêtes les trois vecteurs A, B, C.

Si les trois vecteurs sont coplanaires, ce volume est nul, et réciproquement. Donc

$$(18)\qquad \mathfrak{S}\mathrm{ABC} = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs A, B, C soient situés dans un même plan, ou du moins soient parallèles à un même plan.

Par conséquent, si A, B, C sont coplanaires, les seconds membres des égalités (15) et (16) seront nuls, quel que soit X.

Comme on a, de plus, $\mathfrak{S}\mathrm{AB} = -\Sigma ab$, on peut aisément mettre la partie imaginaire de ABC sous la forme

$$\mathfrak{S}\mathrm{AB}.(c_1 \mathrm{I}_1 + c_2 \mathrm{I}_2 + c_3 \mathrm{I}_3) + \mathfrak{S}\mathrm{BC}.(a_1 \mathrm{I}_1 + a_2 \mathrm{I}_2 + a_3 \mathrm{I}_3)$$
$$- \mathfrak{S}\mathrm{CA}(b_1 \mathrm{I}_1 + b_2 \mathrm{I}_2 + b_3 \mathrm{I}_3),$$

ce qui donne la formule (10).

En vertu de la formule (17), l'identité (14) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0.$$

égalité qu'on aurait pu établir directement, en remarquant que la première ligne horizontale du déterminant est égale à la somme des trois autres, multipliées respectivement par I_1, I_2, I_3.

Si l'on considère un produit de quatre vecteurs A, B, C, D, on a évidemment

$$\mathfrak{S}\mathrm{ABCD} = \mathfrak{S}(\mathrm{A}.\mathfrak{V}\mathrm{BCD}),$$

ou, en remplaçant $\mathfrak{V}\mathrm{BCD}$ par sa valeur donnée par la formule (10) (art. 547),

$$(19)\qquad \mathfrak{S}\mathrm{ABCD} = \mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathfrak{S}\mathrm{CD} - \mathfrak{S}\mathrm{AC}.\mathfrak{S}\mathrm{BD} + \mathfrak{S}\mathrm{AD}.\mathfrak{S}\mathrm{BC}.$$

En outre, en permutant circulairement les lettres,

$$\mathfrak{S}\mathrm{BCDA} = \mathfrak{S}\mathrm{BC}.\mathfrak{S}\mathrm{DA} - \mathfrak{S}\mathrm{BD}.\mathfrak{S}\mathrm{CA} + \mathfrak{S}\mathrm{BA}.\mathfrak{S}\mathrm{CD},$$

ce qui donne

$$(20)\qquad \mathfrak{S}\mathrm{ABCD} = \mathfrak{S}\mathrm{BCDA}.$$

La partie réelle du produit de quatre vecteurs n'est donc pas altérée par une permutation circulaire des facteurs.

En joignant à cette relation l'égalité

$$(21)\qquad \mathfrak{S}\mathrm{ABCD} = \mathfrak{S}\mathrm{DCBA},$$

qui résulte des formules (3) (art. 545), on a toutes les relations simples relatives au produit de quatre vecteurs.

On a maintenant

$$\mathfrak{S}\mathrm{ABCD} = \mathfrak{S}(\mathrm{AB}.\mathrm{CD}) = \mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathfrak{S}\mathrm{CD} + \mathfrak{S}(\mathfrak{V}\mathrm{AB}.\mathfrak{V}\mathrm{CD}).$$

Comparant cette relation à la relation (19), on en tire la nouvelle relation

$$(22)\qquad \mathfrak{S}(\mathfrak{V}\mathrm{AB}.\mathfrak{V}\mathrm{CD}) = \mathfrak{S}\mathrm{AD}.\mathfrak{S}\mathrm{CB} - \mathfrak{S}\mathrm{AC}.\mathfrak{S}\mathrm{BD}.$$

552. Considérons l'expression

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{BA},$$

A et B étant des vecteurs. On a d'abord (art. 519)

$$\mathfrak{S}\mathrm{X} = \mathfrak{S}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{BA} = \mathfrak{S}\mathrm{BAA}^{-1} = \mathfrak{S}\mathrm{B} = 0.$$

Donc x est un vecteur [1] de même module que B. On a ensuite

$$\mathfrak{S}\,A\times B = \mathfrak{S}\,A A^{-1} B A B = \mathfrak{S}\,B A B = \mathfrak{S}\,B^2 A = B^2 \mathfrak{S}\,A = 0.$$

Donc (art. 551) le vecteur x est situé dans le plan AOB,

On a aussi

$$\mathfrak{S}\,A X = \mathfrak{S}\,A A^{-1} B A = \mathfrak{S}\,B A,$$

de sorte que (art. 524)

$$-\mathfrak{T}X.\mathfrak{T}A.\cos AOX = -\mathfrak{T}A.\mathfrak{T}B.\cos BOA,$$

et, comme $\mathfrak{T}X = \mathfrak{T}B$, $\cos AOX = \cos BOA$. De même

$$\mathfrak{V}\,A X = \mathfrak{V}\,B A, \quad \text{d'où} \quad \sin AOX = \sin BOA.$$

Donc l'angle BOA = AOX, et par suite le vecteur OA est bissecteur de l'angle BOX, et la biradiale BOX a un argument double de celui de la biradiale BOA.

On peut encore le voir ainsi : on a

$$X = A^{-1}.\dot{B}A = A^{-1}\times\mathfrak{C}\,A B,$$

d'où, en opérant par $A\times$,

$$A X = \mathfrak{C}\,A B,$$

puis, en divisant par $-(\mathfrak{T}A)^2$,

$$\frac{X}{A} = \mathfrak{C}\,\frac{B}{A}.$$

Enfin on a

$$X = A^{-1} B A = A A^{-1} A^{-1} B A = A B A.(A^{-1})^2 = A B A^{-1}.$$

Donc x ne change pas, lorsqu'on remplace A par sa valeur réciproque A^{-1}.

---

[1] Cette conclusion serait encore vraie si A représentait un quaternion quelconque.

CHAPITRE VII.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS EN QUATERNIONS.

---

§ Ier.

Exemples particuliers de résolution d'équations du premier et du second degré.

553. Étant donnée une équation algébrique rationnelle quelconque entre un quaternion inconnu X et des quaternions connus $A, B, \ldots$,

$$F(X, A, B, \ldots) = 0, \tag{1}$$

on pourra substituer aux quaternions leurs valeurs développées,

$$X = x_0 + x_1 \iota_1 + x_2 \iota_2 + x_3 \iota_3,$$
$$A = a_0 + a_1 \iota_1 + a_2 \iota_2 + a_3 \iota_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et, en suivant les règles de calcul précédemment établies, on parviendra généralement à réduire le premier membre de l'équation à la forme d'un quaternion; ce qui donne

$$f_0 + f_1 \iota_1 + f_2 \iota_2 + f_3 \iota_3 = 0, \tag{2}$$

f_0, f_1, f_2, f_3 étant des fonctions des quantités réelles $x_0, x_1, \ldots, a_0, \ldots$. Pour que l'équation soit satisfaite, il faudra que chacune des quantités f s'annule séparément, ce qui fournira quatre équations, au moyen desquelles on déterminera les quatre composantes x_0, x_1, x_2, x_3 de l'inconnue.

Si l'on trouve pour ces composantes un ou plusieurs systèmes de valeurs réelles, la quantité cherchée sera un quater-

nion ordinaire. Si les composantes sont des quantités complexes ordinaires de la forme $\alpha + \beta \sqrt{-1}$, la valeur de X sera ce que Hamilton appelle un *biquaternion*.

En tenant compte de tous les systèmes de valeurs, tant réelles que complexes, des composantes de l'inconnue, le nombre des solutions n'est plus égal, comme dans la théorie des quantités complexes ordinaires, au degré de l'équation; il est généralement plus grand, comme nous en avons déjà vu un exemple (art. 404).

554. Donnons quelques exemples de résolution d'équations entre quaternions.

I. Soit l'équation du premier degré

$$\imath_1 X \imath_2 - \imath_3 X(1 + \imath_1) + X \imath_3 = 1 + \imath_2 + \imath_3 .$$

En substituant à X sa valeur développée, effectuant les multiplications et séparant les termes de même espèce, on obtiendra les quatre équations

$$x_2 - x_3 = 1, \quad -2x_2 - 1 = 0, \quad x_0 + x_1 = 1, \quad -x_0 + x_1 = 1,$$

d'où l'on tire

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -\tfrac{1}{2}, \quad x_3 = -\tfrac{3}{2},$$

et par suite la valeur de l'inconnue est

$$X = \imath_1 - \tfrac{1}{2}\imath_2 - \tfrac{3}{2}\imath_3 .$$

555. II. Soit encore l'équation du second degré

$$X^2 - 10\imath_1 X - 40\imath_2 = 0 .$$

En posant $X = x_0 + x_1\imath_1 + x_2\imath_2 + x_3\imath_3$, et égalant séparément à zéro la partie réelle et les coefficients de $\imath_1, \imath_2, \imath_3$, on a les équations

$$\begin{aligned} 0 &= x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 10x_1 , \\ 0 &= x_0(x_1 - 5) , \\ 0 &= x_0 x_2 - 5x_3 - 20 , \\ 0 &= x_0 x_3 + 5x_2 . \end{aligned}$$

On en tire d'abord la solution

$$x_0 = 0, \quad \text{d'où} \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -4, \quad x_1^2 - 10x_1 + 16 = 0,$$
$$x_1 = 8 \text{ ou } 2,$$

ce qui donne les deux racines

$$X = 8\,\mathrm{i}_1 - 4\,\mathrm{i}_3, \quad X = 2\,\mathrm{i}_1 - 4\,\mathrm{i}_3.$$

On a encore la solution $x_1 = 5$, qui conduit aux équations

$$x_0^2 + 25 = x_2^2 + x_3^2,$$
$$(x_0^2 + 25)x_2 = 20x_0,$$
$$(x_0^2 + 25)x_3 = -100,$$

d'où l'on tire, i désignant l'unité imaginaire ordinaire, considérée comme irréductible avec $\mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \mathrm{i}_3$,

$$x_0^2 + 25 = \pm 20, \qquad x_0 = \pm i\sqrt{5} \text{ ou } \pm 3i\sqrt{5},$$
$$x_2 = +x_0 \text{ ou } -x_0, \qquad x_3 = -5 \text{ ou } +5,$$

ce qui donne enfin les quatre solutions

$$X = \pm i\sqrt{5}(1 + \mathrm{i}_2) + 5\mathrm{i}_1 - 5\mathrm{i}_3,$$
$$X = \pm i.3\sqrt{5}(\mathrm{i}_1 - \mathrm{i}_2) + 5\mathrm{i}_1 + 5\mathrm{i}_3.$$

On voit ici un exemple de la multiplicité des solutions que l'on obtient par la combinaison des unités imaginaires de divers ordres (art. 404).

556. Il peut arriver, dans certains cas, que l'équation (2) (art. 553) manque de quelques-uns de ses termes, ou que quelques-unes des équations $f_0 = 0, f_1 = 0, \ldots$ rentrent les unes dans les autres. Alors l'équation proposée ne fournira plus les quatre conditions nécessaires pour déterminer les quatre composantes de l'inconnue, et celle-ci sera, au moins en partie, indéterminée.

Exemples. I. Soit l'équation

$$\mathfrak{T}X = \mathbf{a};$$

le module de X étant seul donné, le verseur $\mathfrak{U}X$ est entièrement

indéterminé, de sorte que la valeur de X peut se mettre sous la forme

$$X = \mathrm{a}.\mathrm{A}^{\alpha},$$

l'axe A et l'argument α pouvant être pris à volonté. On voit d'ailleurs qu'entre x_0, x_1, x_2, x_3 on n'a qu'une seule équation

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \mathrm{a}^2.$$

557. II. De même, l'équation

$$\mathfrak{S}X = \mathrm{a}, \quad \text{ou} \quad x_0 = \mathrm{a}$$

laisse indéterminés le vecteur $\mathfrak{V}X = x_t$, ou les trois composantes x_1, x_2, x_3, de sorte que $X = \mathrm{a} + r_t$, r_t étant un vecteur arbitraire.

558. III. L'équation

$$\text{(A)} \qquad \mathfrak{V}(\mathrm{A}x_t) = \mathrm{B},$$

A et B étant des vecteurs donnés, ne fournit que trois conditions, la partie réelle du produit $\mathrm{A}x_t$ restant indéterminée. Le premier membre peut s'écrire

$$\mathfrak{V}(\mathrm{A}X - \mathrm{A}x_0) = \mathfrak{V}\mathrm{A}X - \mathrm{A}x_0,$$

d'où

$$\mathfrak{V}\mathrm{A}X = \mathrm{B} + \mathrm{A}x_0,$$

x_0 étant arbitraire. La partie réelle y_0 de $\mathrm{A}X$ étant également arbitraire, on aura donc

$$\mathrm{A}X = \mathrm{B} + \mathrm{A}x_0 + y_0,$$

d'où, en opérant par $\mathrm{A}^{-1}\times$,

$$X = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} + x_0 + \mathrm{A}^{-1}y_0.$$

Si l'on développe le premier membre de l'équation donnée, on trouve les trois équations séparées

$$\text{(B)} \qquad |a_3x_2| = b_1, \quad |a_1x_3| = b_2, \quad |a_2x_1| = b_3.$$

qui ne peuvent subsister ensemble que si l'on a la condition

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0,$$

qui exprime, comme le faisait déjà l'équation (A), que les vecteurs A et B sont rectangulaires entre eux. Cette condition étant supposée satisfaite, les équations (B) se réduisent à deux, ce qui explique la présence des deux arbitraires x_0, y_0.

559. IV. Prenons enfin l'équation

$$\mathfrak{V} \text{A} X = \text{B},$$

A et B étant encore deux vecteurs. En opérant par $\mathfrak{S}.\text{A}^{-1}\times$, on a

$$\mathfrak{S}(\text{A}^{-1}.\mathfrak{V}\text{A}X) = \mathfrak{S}.\text{A}^{-1}(\text{A}X - \mathfrak{S}\text{A}X) = x_0 = \mathfrak{S}\text{A}^{-1}\text{B},$$

de sorte que l'équation proposée devient

$$\mathfrak{V}.\text{A}(\mathfrak{S}\text{A}^{-1}\text{B} + x_t) = \text{B},$$

ou

$$\mathfrak{V}\text{A}x_t = \text{B} - \text{A}.\mathfrak{S}\text{A}^{-1}\text{B} = \text{A}(\text{A}^{-1}\text{B} - \mathfrak{S}\text{A}^{-1}\text{B}) = \text{A}.\mathfrak{V}\text{A}^{-1}\text{B}.$$

On a maintenant $\text{A}^{-1}\text{B} = \frac{1}{\text{A}^2}\text{AB}$, d'où

$$\mathfrak{V}\text{A}^{-1}\text{B} = \frac{1}{\text{A}^2}\left\{ |a_3 b_2| \text{I}_1 + |a_1 b_3| \text{I}_2 + |a_2 b_1| \text{I}_3 \right\},$$

et par suite, en posant $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \Sigma ab$, et remarquant que $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = -\text{A}^2$,

$$\mathfrak{V}\text{A}x_t = -\text{B} - \text{A}^{-1}\Sigma ab,$$

équation analogue à celle de l'exemple précédent, mais où la condition de perpendicularité est identiquement remplie. La valeur de X sera de même forme; seulement ici la partie réelle x_0 est déterminée.

560. Donnons encore quelques exemples de procédés spéciaux qui s'appliquent à des équations d'un fréquent usage.

I. Considérons une équation du premier degré de la forme

$$(1) \qquad AX + XA = 2C.$$

A, C, X désignant des quaternions.

En développant les produits, cette équation devient

$$(a_0 + a_i)(x_0 + x_i) + (x_0 + x_i)(a_0 + a_i) = 2C,$$

ou

$$2a_0x_0 + 2(a_0x_i + x_0a_i) + a_ix_i + x_ia_i = 2C.$$

Or [art. 545, (3)]

$$a_ix_i + x_ia_i = 2\mathfrak{S}a_ix_i;$$

donc l'équation proposée se réduit à

$$a_0x_0 + a_0x_i + x_0a_i + \mathfrak{S}a_ix_i = C = c_0 + c_i,$$

d'où, en égalant séparément les parties réelles et les vecteurs,

$$a_0x_0 + \mathfrak{S}a_ix_i = c_0, \quad a_0x_i + x_0a_i = c_i.$$

La seconde de ces équations donne

(2) $$x_i = \frac{c_i - x_0a_i}{a_0},$$

d'où, en substituant dans la première et développant le produit a_ix_i,

$$a_0x_0 + \mathfrak{S}\left(\frac{a_ic_i + (\mathfrak{T}a_i)^2x_0}{a_0}\right) = c_0,$$

ou

$$a_0^2x_0 + \mathfrak{S}a_ic_i + (\mathfrak{T}a_i)^2x_0 = a_0c_0,$$

et par suite

(3) $$x_0 = \frac{a_0c_0 - \mathfrak{S}a_ic_i}{a_0^2 + (\mathfrak{T}a_i)^2} = \frac{a_0c_0 - \mathfrak{S}a_ic_i}{(\mathfrak{T}a)^2}.$$

En substituant cette valeur dans (2), on aura x_i.

Soient, par exemple,

$$A = 1 + 2\iota_1 - \iota_3, \quad C = 3 + \iota_1 - 2\iota_2 - \iota_3.$$

On aura

$$a_0c_0 = 3, \quad (\mathfrak{T}A)^2 = 1 + 4 + 1 = 6,$$

$$a_ic_i = (2\iota_1 - \iota_3)(\iota_1 - 2\iota_2 - \iota_3), \quad \text{d'où} \quad \mathfrak{S}a_ic_i = -3,$$

et par suite

$$x_0 = \frac{3 - (-3)}{6} = 1.$$

Il vient maintenant

$$x_1 = \frac{(\iota_1 - 2\iota_2 - \iota_3) - 1.(2\iota_1 - \iota_3)}{1} = -\iota_1 - 2\iota_2,$$

d'où enfin

$$X = 1 - \iota_1 - 2\iota_2.$$

561. II. Si l'on donne l'équation plus générale

$$AX + XB = C,$$

opérons successivement sur cette équation par $A\times$, et par $\times\,\overline{B}$; on en tirera

$$A^2X + AXB = AC,$$
$$AX\overline{B} + X(\mathfrak{T}B)^2 = C\overline{B}.$$

Ajoutant ces deux équations, et remarquant que $B + \overline{B} = 2b_0$, il vient

$$[A^2 + 2b_0A + (\mathfrak{T}B)^2]X = AC + C\overline{B},$$

d'où finalement

$$X = \frac{AC + C\overline{B}}{A^2 + 2b_0A + (\mathfrak{T}B)^2}.$$

562. III. Si l'on applique ce procédé à l'équation

$$(1) \qquad AX = XB,$$

il vient

$$A^2X = AXB, \quad AX\overline{B} = X(\mathfrak{T}B)^2,$$

d'où

$$[A^2 + (\mathfrak{T}B)^2 - 2Ab_0]X = 0,$$

équation qui ne peut admettre pour X une valeur différente de zéro, à moins que l'on n'ait

$$A^2 + (\mathfrak{T}B)^2 - 2Ab_0 = 0,$$

ou

$$(A - b_0)^2 = b_0^2 - (\mathfrak{T}B)^2 = -(\mathfrak{T}b_1)^2,$$

d'où, en désignant par A le vecteur unitaire, axe du quaternion A, ou le verseur de a_i, on a

$$A = b_0 + \mathrm{A}.\mathfrak{T}b_i.$$

On verrait de la même manière que, B étant le verseur de b_i, on doit avoir aussi

$$B = a_0 + \mathrm{B}.\mathfrak{T}a_i.$$

Mais, en vertu de l'équation, il faut que l'on ait

$$\mathfrak{T}A = \mathfrak{T}B, \quad \text{ou} \quad a_0^2 + (\mathfrak{T}a_i)^2 = b_0^2 + (\mathfrak{T}b_i)^2.$$

De plus, des valeurs ci-dessus de A et de B il résulte $a_0 = b_0$, d'où, en vertu de la dernière équation, $\mathfrak{T}a_i = \mathfrak{T}b_i$. Donc

$$\frac{a_0}{\mathfrak{T}a_i} = \frac{b_0}{\mathfrak{T}b_i} = h_0,$$

en appelant h_0 la valeur commune des deux rapports. Par suite,

$$A = (h_0 + \mathrm{A})\mathfrak{T}b_i, \qquad B = (h_0 + \mathrm{B})\mathfrak{T}a_i,$$

d'où

$$\frac{1}{\mathfrak{T}a_i}.AX = (h_0 + \mathrm{A})(x_0 + x_i) = (x_0 + x_i)(h_0 + \mathrm{B}),$$

$$x_0(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = x_i\mathrm{B} - \mathrm{A}x_i,$$

ce qui donne

$$\mathfrak{S}(\mathrm{B} - \mathrm{A})x_i = 0;$$

par conséquent, x_i est perpendiculaire à B — A, et l'on a

$$x_i = \mathfrak{V}.\mathrm{C}(\mathrm{A} - \mathrm{B}),$$

C étant un vecteur indéterminé.

Nous avons maintenant, à cause de $\mathrm{A}^2 = \mathrm{B}^2 = -1$, et en vertu de la formule (10) de l'art. 547,

$$\begin{aligned} x_0(\mathrm{A}-\mathrm{B}) = x_i\mathrm{B} - \mathrm{A}x_i &= [\mathfrak{V}.\mathrm{C}(\mathrm{A}-\mathrm{B})].\mathrm{B} - \mathrm{A}.[\mathfrak{V}.\mathrm{C}(\mathrm{A}-\mathrm{B})] \\ &= \mathrm{C}(\mathrm{A}-\mathrm{B})\mathrm{B} - \mathrm{A}\mathrm{C}(\mathrm{A}-\mathrm{B}) + (\mathrm{A}-\mathrm{B})[\mathfrak{S}.\mathrm{C}(\mathrm{A}-\mathrm{B})] \\ &= (\mathrm{C}\mathrm{A} + \mathrm{A}\mathrm{C})\mathrm{B} - \mathrm{C}\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}\mathrm{C}\mathrm{A} + (\mathrm{A}-\mathrm{B})[\mathfrak{S}.\mathrm{C}(\mathrm{A}-\mathrm{B})] \\ &= 2\mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{C}\mathrm{A} - \mathrm{C} + \mathrm{C} - 2\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{C}\mathrm{A} + (\mathrm{A}-\mathrm{B})[\mathfrak{S}.\mathrm{C}(\mathrm{A}-\mathrm{B})] \\ &= -(\mathrm{A}-\mathrm{B})[\mathfrak{S}.\mathrm{C}(\mathrm{A}+\mathrm{B})]. \end{aligned}$$

Donc

$$x_0 = -\mathfrak{S}.\text{c}(\text{A}+\text{B}),$$

et par suite

$$\begin{aligned} X &= -\mathfrak{S}.\text{c}(\text{A}+\text{B}) + \mathfrak{V}.\text{c}(\text{A}-\text{B}) \\ &= -\mathfrak{S}(\text{AC}+\text{CB}) - \mathfrak{V}(\text{AC}+\text{CB}) = -(\text{AC}+\text{CB}). \end{aligned}$$

On peut changer le signe de c, et écrire enfin

$$X = \text{AC} + \text{CB},$$

c étant un vecteur de longueur et de direction arbitraires, et A, B étant les verseurs de a_ι et de b_ι,

$$\text{A} = \mathfrak{U}a_\iota, \qquad \text{B} = \mathfrak{U}b_\iota.$$

On peut vérifier cette solution, en remarquant que, A et B ayant même module et même partie réelle, il suffit de faire voir que AX et XB ont même valeur; et, en effet, cette valeur commune est $-$ c $+$ ACB.

D'ailleurs, on peut très facilement obtenir cette solution, en représentant, comme on l'a fait, par exemple, dans l'art. 507, les verseurs des quaternions par des arcs de grand cercle.

563. IV. Considérons l'équation du second degré

$$X^2 = 2XA + B,$$

ou, ce qui revient au même, comme on le voit en remplaçant les divers termes par leurs conjugués, l'équation

(1) $$X^2 = 2AX + B.$$

Posons

$$X = Y + A,$$

d'où, en substituant,

$$Y^2 + YA + AY + A^2 = 2AY + 2A^2 + B,$$

ou, en remarquant [art. 545, (4)] que

$$Ay_\iota - y_\iota A = (a_0 + a_\iota)y_\iota - y_\iota(a_0 + a_\iota) = 2\mathfrak{V}a_\iota y_\iota,$$

et posant, pour plus de simplicité,

$$A^2 + B = 2C,$$
$$(y_0 + y_i)^2 - 2\mathfrak{V}\, a_i y_i = 2c_0 + 2c_i,$$

équation qui se partage dans les deux suivantes,

(2) $$y_0^2 + y_i^2 = 2c_0,$$

(3) $$\mathfrak{V}.(y_0 - a_i)y_i = c_i.$$

En opérant sur l'équation (3) par $\mathfrak{S}.a_i \times$, il vient

$$\mathfrak{S}(a_i y_0 y_i) - \mathfrak{S}(a_i.\mathfrak{V}\, a_i y_i) = \mathfrak{S}\, a_i c_i,$$

ou, à cause de $\mathfrak{S}\,(a_i.\,\mathfrak{V}\, a_i y_i) = \mathfrak{S}\, a_i a_i y_i = 0$, et de $\mathfrak{S}\, a_i y_i = - \mathfrak{S}\,(y_0 - a_i) y_i$,

$$\mathfrak{S}.(y_0 - a_i)y_i = -\frac{1}{y_0}\mathfrak{S}\, a_i c_i.$$

Par conséquent,

(4) $$(y_0 - a_i)y_i = -\frac{1}{y_0}\mathfrak{S}\, a_i c_i + c_i.$$

Si l'on fait maintenant, pour abréger,

$$y_0 - a_i = Q, \quad \text{d'où} \quad y_0 = q_0, \quad -a_i = q_i,$$

l'équation (4) pourra s'écrire

$$q_0 Q y_i = \mathfrak{S}\, q_i c_i + q_0 c_i = Qc_i - (q_i c_i - \mathfrak{S}\, q_i c_i) = Qc_i - \mathfrak{V}\, q_i c_i,$$

En multipliant par $\overline{Q}$, conjugué de Q, et posant $\mathfrak{T}Q = \mathrm{q}$, il vient

$$q_0 \mathrm{q}^2 y_i = \mathrm{q}^2 c_i - \overline{Q}.\mathfrak{V}\, q_i c_i,$$

d'où, en élevant les deux membres au carré,

$$q_0^2 \mathrm{q}^4 y_i^2 = \mathrm{q}^4 c_i^2 - \mathrm{q}^2 (c_i \overline{Q}.\mathfrak{V}\, q_i c_i + \overline{Q}.\mathfrak{V}\, q_i c_i . c_i) + (\overline{Q}.\mathfrak{V}\, q_i c_i)^2.$$

Or on a [art. 545, (3)]

$$c_i \overline{Q}.\mathfrak{V}\, q_i c_i + \overline{Q}.\mathfrak{V}\, q_i c_i . c_i$$
$$= 2q_0.\mathfrak{S}(c_i.\mathfrak{V}\, q_i c_i) - c_i q_i.\mathfrak{V}\, q_i c_i - q_i.\mathfrak{V}\, q_i c_i . c_i.$$

D'ailleurs [art. 547, (5) et (7)],

$$\mathfrak{S}(c_i.\mathfrak{V}q_ic_i)=\mathfrak{S}(c_i.q_ic_i)=\mathfrak{S}c_i^2q_i=0,$$

$$\mathfrak{S}(c_iq_i.\mathfrak{V}q_ic_i)=\mathfrak{S}(q_i.\mathfrak{V}q_ic_i.c_i)=\mathfrak{S}[(\mathfrak{S}c_iq_i+\mathfrak{V}c_iq_i)\mathfrak{V}q_ic_i]$$
$$=-(\mathfrak{V}q_ic_i)^2.$$

On a ensuite [art. 547, (11)],

$$\mathfrak{V}(c_iq_i.\mathfrak{V}q_ic_i)+\mathfrak{V}(q_i.\mathfrak{V}q_ic_i.c_i)=2c_i.\mathfrak{S}(q_i.\mathfrak{V}q_ic_i)=0.$$

Donc

$$c_i\bar{Q}.\mathfrak{V}q_ic_i+\bar{Q}.\mathfrak{V}q_ic_i.c_i=-2(\mathfrak{V}q_ic_i)^2.$$

Enfin, le dernier terme $(\bar{Q}.\mathfrak{V}q_ic_i)^2$, que nous représenterons, pour abréger, par $(\bar{Q}\text{R})^2$, est égal à

$$(q_0-q_i)\text{R}(q_0-q_i)\text{R}=q_0^2\text{R}^2-q_0(\text{R}q_i+q_i\text{R})+q_i\text{R}q_i\text{R}.$$

On a d'abord

$$\text{R}q_i+q_i\text{R}=2\mathfrak{S}q_i\text{R}=2\mathfrak{S}(q_i\mathfrak{V}q_ic_i)=0.$$

Puis,

$$q_i\text{R}q_i\text{R}=(\mathfrak{S}q_i\text{R}q_i+\mathfrak{V}q_i\text{R}q_i)\text{R}=\mathfrak{V}q_i\text{R}q_i.\text{R},$$

et [art. 547, (10)], à cause de $\mathfrak{S}\text{R}q_i=0$,

$$\mathfrak{V}q_i\text{R}q_i=q_i.\mathfrak{S}\text{R}q_i-\text{R}.\mathfrak{S}q_iq_i+q_i.\mathfrak{S}q_i\text{R}=-q_i^2\text{R}.$$

Donc

$$q_i\text{R}q_i\text{R}=-q_i^2\text{R}^2=-q_i^2(\mathfrak{V}q_ic_i)^2,$$

et par suite

$$(\bar{Q}\text{R})^2=(q_0^2-q_i^2)\text{R}^2=\text{q}^2(\mathfrak{V}q_ic_i)^2.$$

D'après toutes ces réductions, on a

$$q_0^2\text{q}^4y_i^2=\text{q}^4c_i^2-2\text{q}^2(\mathfrak{V}q_ic_i)^2+\text{q}^2(\mathfrak{V}q_ic_i)^2,$$

ou

$$q_0^2y_i^2=c_i^2-\frac{1}{\text{q}^2}(\mathfrak{V}q_ic_i)^2.$$

Mettant cette valeur de y_i^2 dans l'équation (2), et remplaçant q_0, q_i, q^2 par leurs valeurs, il vient

(5) $$[y_0^2(y_0^2-2c_0)+c_i^2](y_0^2-a_i^2)-(\mathfrak{V}a_ic_i)^2=0,$$

ou encore, en remarquant que $a_i^2 c_i^2 = a_i c_i \,.\, c_i a_i = a_i c_i \,.\, \overline{a_i c_i} = (\mathfrak{T} a_i c_i)^2 = (\mathfrak{S} a_i c_i)^2 - (\mathfrak{V} a_i c_i)^2$,

$$(6) \qquad y_0^2 [y_0^4 - (a_i^2 + 2c_0) y_0^2 + 2a_i^2 c_0 + c_i^2] - (\mathfrak{S} a_i c_i)^2 = 0.$$

Cette équation est du troisième degré par rapport à y_0^2; elle donnera donc pour y_0 six valeurs, dont deux au moins seront réelles, et d'où l'on déduira ensuite, au moyen de (4), les valeurs correspondantes de y_i, de sorte que l'équation (1) admettra en général six racines. Nous avons déjà rencontré cette circonstance dans l'exemple particulier traité dans l'article 555. Hamilton a fait voir qu'une équation du second degré en quaternions admet généralement seize racines. Dans le cas actuel, dix de ces racines sont infinies.

564. Si l'on applique les calculs que nous venons de faire à l'exemple de l'art. 555, on aura

$$A = 5\iota_1, \qquad 2C = -25 + 40\iota_2,$$

d'où $\mathfrak{S} a_i c_i = \mathfrak{S}(-100\iota_3) = 0$. L'équation en y_0 devient alors

$$y_0^2 [(y_0^2 + 25)^2 - 400] = 0,$$

d'où les solutions

$$y_0 = 0, \quad y_0 = \pm i\sqrt{5}, \quad y_0 = \pm 3i\sqrt{5}.$$

La première solution $y_0 = 0$ rend illusoire l'équation (4). Mais l'équation (3) devient

$$\mathfrak{V} \iota_1 y_i = -4\iota_2, \qquad \text{d'où} \qquad \iota_1 y_i = -k_0 - 4\iota_2,$$

k_0 étant une quantité réelle, et par suite

$$y_i = k_0 \iota_1 - 4\iota_3.$$

Portant cette valeur dans l'équation (2), on en tire $k_0 = \pm 3$, d'où

$$y_i = \pm 3\iota_1 - 4\iota_3, \qquad X = 5\iota_1 \pm 3\iota_1 - 4\iota_3,$$

ce qui donne les deux racines en quaternions à coefficients réels ou quaternions proprement dits.

Les autres racines s'obtiendront au moyen des équations

$$y_0 y_i = \frac{y_0 c_i + \mathfrak{S} a_i c_i}{y_0 + a_i} = \frac{(y_0 + a_i) c_i - \mathfrak{V} a_i c_i}{y_0 + a_i} = c_i - \frac{y_0 - a_i}{y_0^2 - a_i^2} \mathfrak{V} a_i c_i,$$

$$X = y_0 + y_i + A.$$

565. V. L'équation

$$X^2 = AX + XB$$

se ramène à une équation du premier degré, en opérant consécutivement par $X^{-1}\times$ et par $\times X^{-1}$, ce qui donne

$$1 = X^{-1}A + BX^{-1},$$

équation de même forme que celle de l'exemple III, lorsqu'on prend X^{-1} pour inconnue.

§ II.

Méthode générale d'Hamilton pour la résolution des équations du premier degré en quaternions.

566. La forme la plus générale d'une équation du premier degré par rapport au quaternion X est

$$\sum AXB + \sum C.\mathfrak{S}A'XB' + \sum D.\mathfrak{V}A'XB'.E = F.$$

Si l'on remplace $\mathfrak{V}A'XB'$ par $A'XB' - \mathfrak{S}A'XB'$, le troisième terme du premier membre rentrera dans les deux premiers. Donc l'équation peut se réduire à la forme

$$(1) \qquad \sum AXB + \sum C.\mathfrak{S}A'XB' = F,$$

A, B, C, A', B', F étant des quaternions qnelconques.

On a maintenant [art. 546, (7)]

$$\mathfrak{S}AXB = \mathfrak{S}XBA = x_0.\mathfrak{S}BA + \mathfrak{S}(x_i.\mathfrak{V}BA),$$

ce qui fait connaître la forme de la partie réelle du premier membre.

Pour avoir la partie imaginaire, développons le produit

$$(a_0+a_\iota)(x_0+x_\iota)(b_0+b_\iota)$$
$$= x_0 A B + a_0 b_0 x_\iota + a_0 x_\iota b_\iota + b_0 a_\iota x_\iota + a_\iota x_\iota b_\iota,$$

et nous trouverons [art. 547, (10)]

$$\mathfrak{V} AXB$$
$$= x_0 . \mathfrak{V} AB + \mathfrak{V} . (a_0 b_0 - a_0 b_\iota + a_\iota b_0 - a_\iota b_\iota) x_\iota + \mathfrak{V} . a_\iota (b_\iota x_\iota + x_\iota b_\iota)$$
$$= x_0 . \mathfrak{V} A B + \mathfrak{V} A \bar{B} x_\iota + 2 a_\iota . \mathfrak{S} b_\iota x_\iota .$$

D'après cela, l'équation (1) se partage dans les deux suivantes

$$x_0 \left(\sum \mathfrak{S} AB + \sum c_0 . \mathfrak{S} A'B'\right) + \sum \mathfrak{S}(\mathfrak{V} BA . x_\iota)$$
$$+ \sum c_0 . \mathfrak{S}(\mathfrak{V} B'A' . x_\iota) = f_0,$$

$$x_0 \sum \mathfrak{V} A B + \sum \mathfrak{V} A B x_\iota + 2 \sum a_\iota . \mathfrak{S} b_\iota x_\iota$$
$$+ \sum c_\iota [x_0 . \mathfrak{S} A'B' + \mathfrak{S}(\mathfrak{V} B'A' . x_\iota)] = f_\iota,$$

ou, en posant, pour abréger,

$$g_0 = \sum \mathfrak{S} AB + \sum c_0 . \mathfrak{S} A'B',$$
$$g_\iota = \sum \mathfrak{V} AB + \sum c_\iota . \mathfrak{S} A'B',$$
$$h_\iota = \sum \mathfrak{V} BA + \sum c_0 . \mathfrak{V} B'A',$$

les deux équations

(2) $f_0 = g_0 x_0 + \mathfrak{S} h_\iota x_\iota,$

(3) $f_\iota = g_\iota x_0 + \sum \mathfrak{V} A B x_\iota + 2 \sum a_\iota . \mathfrak{S} b_\iota x_\iota + \sum c_\iota . \mathfrak{S}(\mathfrak{V} B'A' . x_\iota).$

Si l'on élimine x_0 entre ces deux équations, on obtiendra l'équation

$$g_0 f_\iota - g_\iota f_0 = g_0 \sum \mathfrak{V} A B x_\iota - g_\iota . \mathfrak{S} h_\iota x_\iota$$
$$+ g_0 \left[2 \sum a_\iota . \mathfrak{S} b_\iota x_\iota + \sum c_\iota . \mathfrak{S}(\mathfrak{V} B'A' . x_\iota)\right],$$

laquelle, à cause de $\sum \mathfrak{V} A B x_\iota = \mathfrak{V} \sum A B x_\iota$, rentre dans la forme générale

(4) $$\sum \mathrm{B} . \mathfrak{S} \mathrm{A} \mathrm{X} + \mathfrak{V} Q \mathrm{X} = \mathrm{C},$$

A, B, C, X étant des vecteurs, et Q un quaternion quelconque.

La résolution de cette équation fera connaître la partie

imaginaire x ou x_i de l'inconnue X; en substituant cette valeur dans l'équation (2), on en tirera la partie réelle x_0.

567. Le premier membre de l'équation (4) est une fonction linéaire du vecteur x, que nous représenterons par le symbole $\square$x, de sorte que l'équation (4) pourra s'écrire sous la forme

$$(5) \qquad \square \mathrm{x} = \mathrm{c}.$$

On voit facilement que cette fonction $\square$ jouit des propriétés suivantes :

1° Elle est distributive relativement à l'addition, c'est-à-dire que l'on a, x, y, ... étant des vecteurs quelconques,

$$\square(\mathrm{x} + \mathrm{y} \ldots) = \square \mathrm{x} + \square \mathrm{y} + \ldots.$$

2° On tire de là, par le procédé connu, a étant un nombre réel quelconque,

$$\square \mathrm{a} \mathrm{x} = \mathrm{a} \square \mathrm{x}.$$

3° Il résulte encore, de la première propriété, que l'on a, en prenant la différentielle,

$$d \square \mathrm{x} = \square d\mathrm{x}.$$

Si l'on désigne par $\square^{-1}$ la fonction inverse de $\square$, définie par l'égalité

$$\square^{-1}(\square \mathrm{u}) = \mathrm{u},$$

la valeur de x sera donnée par l'équation

$$(6) \qquad \mathrm{x} = \square^{-1} \mathrm{c}.$$

Le problème est donc ramené à la détermination de cette fonction inverse $\square^{-1}$.

568. Il est clair que tout vecteur peut être exprimé au moyen de la somme de trois vecteurs non coplanaires quelconques, multipliés par des coefficients réels. Si donc on pose

$$\square(\square \mathrm{x}) = \square^2 \mathrm{x}, \quad \square(\square^2 \mathrm{x}) = \square^3 \mathrm{x},$$

les vecteurs $\square$x, $\square^2$x ne seront pas, en général, coplanaires avec x. On pourra donc exprimer $\square^3$x par une fonction linéaire à coefficients réels de x, $\square$x, $\square^2$x.

La même chose aurait encore lieu dans le cas où $\square^2 x$ serait coplanaire avec x et $\square x$. D'abord, si l'on avait $\square x = \lambda x$, on en conclurait $\square^2 x = \lambda^2 x$, ce qui est un cas particulier d'un trinôme linéaire en $x, \square x, \square^2 x$. Si $\square^2 x$ est coplanaire avec x et $\square x$, on pourra poser

$$\square^2 x = \lambda x + \mu \square x,$$

d'où

$$\square^3 x = \lambda \square x + \mu \square^2 x = \lambda x + (\lambda + \mu^2) \square x,$$

ce qui rentre encore dans le cas général.

Si donc on pose généralement

$$(7) \qquad -\square^3 x = \lambda x + \mu \square x + \nu \square^2 x,$$

λ, μ, ν seront des quantités réelles, indépendantes de x, et on pourra les déterminer par des procédés analogues à ceux des art. 549 et 550, en remplaçant successivement x par trois vecteurs connus quelconques, x', x'', x''', et résolvant les trois équations résultantes.

Si maintenant on remplace x par $\square^{-1} x$, l'équation (2) devient alors, en transposant,

$$(8) \qquad -\lambda \square^{-1} x = \mu x + \nu \square x + \square^2 x,$$

et la fonction inconnue $\square^{-1}$ se trouve exprimée au moyen d'opérations directes.

Dans le cas où l'on aurait $\lambda = 0$, μ restant fini, on remplacerait x par $\square^{-2} x$, ce qui donnerait

$$-\mu \square^{-1} x = \nu x + \square x.$$

Enfin, dans le cas de $\lambda = \mu = 0$, on remplacerait x par $\square^{-3} x$, d'où

$$-\nu \square^{-1} x = x.$$

569. Pour donner un exemple de la détermination des coefficients λ, μ, ν, prenons la fonction

$$\square x = -a_1^2 \iota_1 . \mathfrak{S} \iota_1 x - a_2^2 \iota_2 . \mathfrak{S} \iota_2 x - a_3^2 \iota_3 . \mathfrak{S} \iota_3 x,$$

que l'on rencontre dans la théorie des surfaces du second ordre à centre. On peut écrire cette expression sous la forme

$$\square \mathrm{x} = -\sum_r a_r^2 \mathrm{I}_r . \mathfrak{S}\, \mathrm{I}_r \mathrm{x}, \quad (r = 1, 2, 3).$$

Remplaçons successivement x par $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3$. On aura

$$\square \mathrm{I}_s = -\sum_r a_r^2 \mathrm{I}_r . \mathfrak{S}\, \mathrm{I}_r \mathrm{I}_s = a_s^2 \mathrm{I}_s,$$

d'où

$$\square^2 \mathrm{I}_s = \left[-\sum_r a_r^2 \mathrm{I}_r . \mathfrak{S}\, \mathrm{I}_r \square \mathrm{x}\right]_{\mathrm{x}=\mathrm{I}_s} = -\sum_r a_r^2 \mathrm{I}_r . \mathfrak{S}\, \mathrm{I}_r a^2 \mathrm{I}_s = a_s^4 \mathrm{I}_s,$$

et de même

$$\square^3 \mathrm{I}_s = a_s^6 \mathrm{I}_s.$$

En faisant, dans l'équation (2), $\mathrm{x} = \mathrm{I}_s$, il vient

$$-a_s^6 = \lambda + \mu a_s^2 + \nu a_s^4.$$

Donc a_1^2, a_2^2, a_3^2 sont les racines de l'équation cubique

$$z^3 + \nu z^2 + \mu z + \lambda = 0,$$

d'où l'on conclut immédiatement

$$\lambda = -a_1^2 a_2^2 a_3^2, \quad \mu = \Sigma a_r^2 a_s^2, \quad \nu = -\Sigma a_r^2.$$

Donc

$$\square^3 \mathrm{x} = a_1^2 a_2^2 a_3^2 \mathrm{x} - (\Sigma a_r^2 a_s^2) . \square \mathrm{x} + (\Sigma a_r^2) . \square^2 \mathrm{x}\ (^1),$$

et partant la fonction inverse $\square^{-1}$ sera donnée par la formule

$$a_1^2 a_2^2 a_3^2 . \square^{-1} \mathrm{x} = (\Sigma a_r^2 a_s^2) . \mathrm{x} - (\Sigma a_r^2) . \square \mathrm{x} + \square^2 \mathrm{x}.$$

570. Cela posé, considérons une fonction linéaire d'un vecteur x, de la forme

(9) $$\square \mathrm{x} = \sum \mathrm{B} . \mathfrak{S}\, \mathrm{A}\mathrm{x} + \mathfrak{V} Q \mathrm{x}.$$

Opérons par $\mathfrak{S}\, \mathrm{Y} \times$, Y étant un autre vecteur quelconque. Il viendra

$$\mathfrak{S}(\mathrm{Y} . \square \mathrm{x}) = \sum \mathfrak{S}(\mathrm{Y}\mathrm{B} . \mathfrak{S}\, \mathrm{A}\mathrm{x}) + \mathfrak{S}(\mathrm{Y} . \mathfrak{V} Q \mathrm{x}).$$

---

(1) Si l'on remarque que l'opération $\square$ est commutative avec la multiplication par un facteur réel α, puisque $\square(\alpha \mathrm{x}) = \alpha . \square \mathrm{x}$, on voit que cette équation peut s'écrire sous la forme

$$(\square - a_1^2)(\square - a_2^2)(\square - a_3^2)\mathrm{x} = 0.$$

Or

$$\mathfrak{S}(\text{YB}.\mathfrak{S}\text{AX}) = \mathfrak{S}\text{YB}.\mathfrak{S}\text{AX} = \mathfrak{S}\text{XA}.\mathfrak{S}\text{BY} = \mathfrak{S}(\text{XA}.\mathfrak{S}\text{BY}),$$

$$\mathfrak{S}(\text{Y}.\mathfrak{V}Q\text{X}) = \mathfrak{S}[\text{Y}.\mathfrak{V}(q_0+q_i)\text{X}] = q_0\mathfrak{S}\text{YX}+\mathfrak{S}\text{Y}q_i\text{X}$$
$$= q_0\mathfrak{S}\text{XY}-\mathfrak{S}\text{X}q_i\text{Y} = \mathfrak{S}(\text{X}.\mathfrak{V}\bar{Q}\text{Y}).$$

Si donc on désigne par

(10) $$\square'\text{Y} = \sum \text{A}.\mathfrak{S}\text{BY} + \mathfrak{V}\bar{Q}\text{Y}$$

une nouvelle fonction linéaire, différant de la fonction $\square$ par l'échange mutuel des lettres A et B et par le changement de Q dans son conjugué $\bar{Q}$, on aura, quels que soient les vecteurs X, Y,

(11) $$\mathfrak{S}(\text{Y}\,\square\text{X}) = \mathfrak{S}(\text{X}.\square'\text{Y}).$$

Les fonctions $\square$ et $\square'$, qui jouissent de la propriété exprimée par cette équation, sont dites *conjuguées* entre elles. C'est sur cette propriété qu'est fondée la méthode que nous exposons.

571. Soient L, M deux vecteurs tels que l'on ait

(12) $$\square\text{X} = \mathfrak{V}\text{LM}.$$

En opérant par $\mathfrak{S}.\text{L}\times$ et par $\mathfrak{S}.\text{M}\times$, on aura

$$\mathfrak{S}(\text{L}.\square\text{X}) = 0, \quad \mathfrak{S}(\text{M}.\square\text{X}) = 0.$$

Mais, si l'on introduit la fonction conjuguée $\square'$, ces équations deviendront

$$\mathfrak{S}(\text{X}.\square'\text{L}) = 0, \quad \mathfrak{S}(\text{X}.\square'\text{M}) = 0,$$

ce qui fait voir que le vecteur X est perpendiculaire à chacun des vecteurs $\square'$L, $\square'$M. Donc X est parallèle à l'axe du quaternion $\square'\text{L}.\square'\text{M}$, d'où l'on tire, m étant une quantité réelle, encore indéterminée, mais indépendante, comme nous le verrons, des vecteurs L, M, X,

(13) $$m\text{X} = \mathfrak{V}(\square'\text{L}.\square'\text{M}).$$

Or, d'après l'égalité (12), on a

$$x = \square^{-1}\mathfrak{V}_{LM},$$

d'où nous tirons

$$(14)\qquad m.\square^{-1}\mathfrak{V}_{LM} = \mathfrak{V}(\square' L.\square' M),$$

et le problème de l'inversion de la fonction $\square$ est ainsi résolu.

572. Il reste à déterminer la constante m et à exprimer le vecteur $\mathfrak{V}(\square' L.\square' M)$ en fonction de $\mathfrak{V}_{LM}$.

Opérons sur l'équation (13) par $\mathfrak{S}\,\square' N\times$, N étant un vecteur quelconque, non coplanaire avec L et M. Il viendra, en vertu de (11),

$$\begin{aligned}m\mathfrak{S}(\square' N.\square^{-1}\mathfrak{V}_{LM}) &= m.\mathfrak{S}(N.\square\,\square^{-1}\mathfrak{V}_{LM})\\ &= m.\mathfrak{S}(N.\mathfrak{V}_{LM}) = m.\mathfrak{S}_{LMN} = \mathfrak{S}(m.\mathfrak{V}_{LM}.N)\\ &= \mathfrak{S}[\square\,\mathfrak{V}(\square' L.\square' M).N] = \mathfrak{S}[\mathfrak{V}(\square' L.\square' M).\square' N]\\ &= \mathfrak{S}(\square' L.\square' M.\square' N),\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$(15)\qquad m = \frac{\mathfrak{S}(\square' L.\square' M.\square' N)}{\mathfrak{S}.LMN}.$$

Cette quantité est indépendante des valeurs particulières des vecteurs L, M, N. En effet, soient

$$L' = \alpha L + \beta M + \gamma N,\quad M' = \alpha' L + \beta' M + \gamma' N,\quad N' = \alpha'' L + \beta'' M + \gamma'' N$$

trois vecteurs, qui peuvent être quelconques, L, M, N n'étant pas coplanaires. On aura

$$\square' L' = \alpha\square' L + \beta\square' M + \gamma\square' L,\ \text{etc.},$$

d'où, en remarquant que [art. 546, (7)] la quantité de $\mathfrak{S}U_1U_2U_3$ change de signe par la permutation des indices, en suivant la même règle que les termes d'un déterminant,

$$\mathfrak{S}(\square' L'.\square' M'.\square' N') = |\alpha\beta'\gamma''|.\mathfrak{S}(\square' L.\square' M.\square' N),$$
$$\mathfrak{S}L'M'N' = |\alpha\beta'\gamma''|.\mathfrak{S}LMN,$$

quantités dont le rapport ne dépend pas de $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \ldots,$

ni, par suite, du choix des vecteurs L', M', N'. Chacune de ces quantités est, en effet, un invariant, et le multiplicateur numérique est le même pour les deux, quand on passe d'un système de trois vecteurs à un autre.

573. Changeons maintenant $\square$ en $\square + g$, g étant un nombre réel quelconque, ce qui revient à augmenter de g la partie réelle q_0 du quaternion Q. Il est clair que $\square'$ deviendra $\square' + g$, et l'on aura, au lieu de l'équation (14),

$$\begin{aligned} m_g.(\square + g)^{-1}\mathfrak{V}\text{LM} &= \mathfrak{V}[(\square' + g)\text{L}.(\square' + g)\text{M}] \\ &= \mathfrak{V}(\square'\text{L}.\square'\text{M}) + g\mathfrak{V}(\text{L}.\square'\text{M} + \square'\text{L}.\text{M}) + g^2.\mathfrak{V}\text{LM} \\ &= (m\square^{-1} + g\nabla + g^2)\mathfrak{V}\text{LM}, \end{aligned}$$

en posant

$$\nabla\text{LM} = \text{L}.\square'\text{M} + \square'\text{L}.\text{M}.$$

Dans l'équation précédente,

$$m_g = \frac{\mathfrak{S}[(\square' + g)\text{L}.(\square' + g)\text{M}.(\square' + g)\text{N}]}{\mathfrak{S}\text{LMN}} = m + m_1 g + m_2 g^2 + g^3$$

est ce que devient m quand $\square$ est changé en $\square + g$, m_1 et m_2 étant deux nouveaux coefficients réels, indépendants, comme m, de $\text{L}, \text{M}, \text{N}$, et donnés par les formules

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} m_1 &= \frac{\mathfrak{S}(\text{L}.\square'\text{M}.\square'\text{N} + \text{M}.\square'\text{N}.\square'\text{L} + \text{N}.\square'\text{L}.\square'\text{M})}{\mathfrak{S}\text{LMN}}, \\ m_2 &= \frac{\mathfrak{S}(\text{MN}.\square'\text{L} + \text{NL}.\square'\text{M} + \text{LM}.\square'\text{N})}{\mathfrak{S}\text{LMN}}. \end{aligned} \right.$$

En substituant pour m_g sa valeur dans l'équation

$$m_g(\square + g)^{-1}.\mathfrak{V}\text{LM} = (m\square^{-1} + g\nabla + g^2).\mathfrak{V}\text{LM},$$

opérant sur les deux membres par $\square + g$, et égalant de part et d'autre les coefficients des mêmes puissances de g, on a deux identités, plus les deux équations suivantes

$$(17) \qquad m_1 = \square\nabla + m\square^{-1}, \quad m_2 = \square + \nabla,$$

dont la seconde détermine ∇, et montre que nous avions bien

le droit de traiter $\mathfrak{V}(\text{L}.\square'\text{M}+\square'\text{L}.\text{M})$ comme une fonction vectorielle et linéaire de $\mathfrak{V}\text{LM}$.

On aurait pu arriver au même résultat comme il suit :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}(\text{L}.\nabla\mathfrak{V}\text{LM}) &= \mathfrak{S}(\text{L}.\square'\text{L}.\text{M}) = -\mathfrak{S}(\text{LM}.\square'\text{L}) \\
&= -\mathfrak{S}(\mathfrak{V}\text{LM}.\square'\text{L}) = -\mathfrak{S}(\text{L}.\square\mathfrak{V}\text{LM}) \quad [\text{éq. }(11)], \\
\mathfrak{S}(\text{M}.\nabla\mathfrak{V}\text{LM}) &= \mathfrak{S}(\text{ML}.\square'\text{M}) = -\mathfrak{S}(\text{M}.\square\mathfrak{V}\text{LM}), \\
\mathfrak{S}(\text{N}.\nabla\mathfrak{V}\text{LM}) &= \mathfrak{S}(\text{NL}.\square'\text{M}+\text{N}.\square'\text{L}.\text{M}) = m_2.\mathfrak{S}\text{LMN} - \mathfrak{S}(\text{LM}.\square'\text{N}) \\
&= \mathfrak{S}[\text{N}(m_2\mathfrak{V}\text{LM} - \square\mathfrak{V}\text{LM})],
\end{aligned}$$

et, de plus, ces trois équations sont satisfaites par $\nabla = m_2 - \square$.

574. En éliminant ∇ entre les équations (17), il vient

$$m_1 = \square(m_2 - \square) + m\square^{-1},$$

c'est-à-dire

$$m\square^{-1} = m_1 - m_2\square + \square^2, \tag{18}$$

ce qui donne la solution complète des équations vectorielles et linéaires.

Nous allons éclaircir la méthode précédente, en développant le calcul de quelques exemples.

575. I. Soit proposée l'équation

$$\square\text{X} = \mathfrak{V}\text{AXB} = \text{C}.$$

Nous aurons alors [art. 547, (12)]

$$\square'\text{X} = \mathfrak{V}\text{BXA} = \square\text{X}.$$

Donc

$$m = \frac{\mathfrak{S}(\mathfrak{V}\text{ALB}.\mathfrak{V}\text{AMB}.\mathfrak{V}\text{ANB})}{\mathfrak{S}\text{LMN}}.$$

Or, L, M, N sont trois vecteurs non coplanaires quelconques. On peut les supposer égaux à A, B, C, si ceux-ci ne sont pas coplanaires. On a alors

$$m = \frac{\mathfrak{S}(\text{A}^2\text{B}.\text{AB}^2.\mathfrak{V}\text{ACB})}{\mathfrak{S}\text{ABC}} = \frac{\text{A}^2\text{B}^2.\mathfrak{S}(\text{BA}.\mathfrak{V}\text{ACB})}{\mathfrak{S}\text{ABC}}.$$

Mais on a [art. 547, (10)]

$$\begin{aligned} \mathrm{BA}.\mathfrak{V}\mathrm{ACB} &= \mathrm{BA}(\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} + \mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AC} - \mathrm{C}.\mathfrak{S}\mathrm{AB}) \\ &= \mathrm{A}^2.\mathfrak{S}\mathrm{BC}.\mathrm{B} + \mathrm{BAB}.\mathfrak{S}\mathrm{AC} - \mathrm{BAC}.\mathfrak{S}\mathrm{AB}. \end{aligned}$$

Or $\mathfrak{S}\mathrm{BAB} = \mathfrak{S}\mathrm{ABB} = 0$. Donc la partie réelle de $\mathfrak{S}(\mathrm{BA}, \mathfrak{V}\mathrm{ACB})$ se réduit à $-\mathfrak{S}\mathrm{BAC}.\mathfrak{S}\mathrm{AB} = \mathfrak{S}\mathrm{ABC}.\mathfrak{S}\mathrm{AB}$. Par conséquent,

$$m = \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2.\mathfrak{S}\mathrm{AB}.$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} m_1.\mathfrak{S}\mathrm{ABC} &= \mathfrak{S}(\mathrm{A}.\mathrm{AB}^2.\mathfrak{V}\mathrm{ACB} + \mathrm{A}^2\mathrm{B}.\mathrm{B}.\mathfrak{V}\mathrm{ACB} + \mathrm{A}^2\mathrm{B}.\mathrm{AB}^2.\mathrm{C}) \\ &= \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2.\mathfrak{S}\mathrm{BAC} = -\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2.\mathfrak{S}\mathrm{ABC}, \end{aligned}$$

d'où

$$m_1 = -\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2.$$

Enfin,

$$\begin{aligned} m_2.\mathfrak{S}\mathrm{ABC} &= \mathfrak{S}(\mathrm{AB}.\mathfrak{V}\mathrm{ACB} + \mathrm{A}.\mathrm{AB}^2.\mathrm{C} + \mathrm{A}^2\mathrm{B}.\mathrm{BC}) \\ &= -\mathfrak{S}\mathrm{ABC}.\mathfrak{S}\mathrm{AB}, \end{aligned}$$

d'où

$$m_2 = -\mathfrak{S}\mathrm{AB}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2.\mathfrak{S}\mathrm{AB}.\square^{-1}\mathrm{C} &= \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2.\mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathrm{X} \\ &= -\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2\mathrm{C} + \mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathfrak{V}\mathrm{ACB} + \mathfrak{V}(\mathrm{A}.\mathfrak{V}\mathrm{ACB}.\mathrm{B}). \end{aligned}$$

En développant, on trouve [art. 547, (10)]

$$\mathrm{A}.\mathfrak{V}\mathrm{ACB}.\mathrm{B} = \mathfrak{S}\mathrm{BC}.\mathrm{A}^2\mathrm{B} + \mathfrak{S}\mathrm{AC}.\mathrm{AB}^2 - \mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathrm{ACB},$$

d'où

$$\mathfrak{V}(\mathrm{A}.\mathfrak{V}\mathrm{ACB}.\mathrm{B}) + \mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathfrak{V}\mathrm{ACB} = \mathrm{A}^2\mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} + \mathrm{AB}^2.\mathfrak{S}\mathrm{AC},$$

ce qui donne

$$\mathrm{X} = \frac{\mathrm{A}^2\mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} + \mathrm{AB}^2.\mathfrak{S}\mathrm{AC} - \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2\mathrm{C}}{\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2.\mathfrak{S}\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{A}^{-1}.\mathfrak{S}\mathrm{AC} + \mathrm{B}^{-1}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} - \mathrm{C}}{\mathfrak{S}\mathrm{AB}}.$$

Il est facile de vérifier que cette valeur satisfait à l'équation proposée. On a, en effet [art. 547, (10)],

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}\mathrm{AXB} &= \mathfrak{V}\,\frac{\mathrm{A}.\mathrm{A}^{-1}.\mathfrak{S}\mathrm{BC}.\mathrm{B} + \mathrm{A}.\mathrm{B}^{-1}.\mathfrak{S}\mathrm{BC}.\mathrm{B}. - \mathrm{ACB}}{\mathfrak{S}\mathrm{AB}} \\ &= \frac{\mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AC} + \mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} - \mathfrak{V}\mathrm{ACB}}{\mathfrak{S}\mathrm{AB}} = \mathrm{C}. \end{aligned}$$

576. On aurait pu obtenir plus simplement la solution par une méthode directe. On trouve, en opérant sur l'équation

$$\mathfrak{V}\mathrm{AXB} = \mathrm{C}$$

par $\mathfrak{S}.\mathrm{A}\times$, puis par $\mathfrak{S}.\mathrm{B}\times$,

$$\mathfrak{S}(\mathrm{A}.\mathfrak{V}\mathrm{AXB}) = \mathfrak{S}(\mathrm{A}.\mathrm{AXB}) = \mathrm{A}^2.\mathfrak{S}\mathrm{XB} = \mathfrak{S}\mathrm{AC},$$

et de même,

$$\mathrm{B}^2.\mathfrak{S}\mathrm{AX} = \mathfrak{S}\mathrm{BC}.$$

Par suite,

$$\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{XB} = \mathrm{A}^{-1}.\mathfrak{S}\mathrm{AC}, \quad \mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AX} = \mathrm{B}^{-1}.\mathfrak{S}\mathrm{BC},$$

d'où, en ajoutant, et ayant égard à l'équation (10) de l'art. 547, qui donne $\mathfrak{V}\mathrm{AXB} = \mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BX} + \mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AX} - \mathrm{X}.\mathfrak{S}\mathrm{AB} = \mathrm{C}$,

$$\mathrm{X}.\mathfrak{S}\mathrm{AB} = \mathrm{A}^{-1}.\mathfrak{S}\mathrm{AC} + \mathrm{B}^{-1}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} - \mathrm{C},$$

ce qui s'accorde avec le résultat précédent.

577. Si $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ sont coplanaires, la méthode ne cesse pas d'être applicable; mais le résultat peut être obtenu beaucoup plus simplement.

On a, en effet, dans le cas de vecteurs coplanaires [art. 551, (18)],

$$\begin{aligned} 0 = \mathfrak{S}\mathrm{ABC} = \mathfrak{S}(\mathrm{AB}.\mathfrak{V}\mathrm{AXB}) &= \mathfrak{S}[\mathrm{AB}(\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{XB} + \mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AX} - \mathrm{X}.\mathfrak{S}\mathrm{AB})] \\ &= \mathfrak{S}\mathrm{ABA}.\mathfrak{S}\mathrm{XB} + \mathfrak{S}\mathrm{AB}^2.\mathfrak{S}\mathrm{AX} - \mathfrak{S}\mathrm{ABX}.\mathfrak{S}\mathrm{AB}, \end{aligned}$$

d'où résulte $\mathfrak{S}\mathrm{ABX} = 0$; X est donc caplanaire avec $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$. Dès lors, l'équation proposée peut s'écrire

$$\mathrm{AXB} = \mathrm{C},$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{C}\mathrm{B}^{-1}.$$

ou, en vertu de la formule (10), art. 547,

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}.\mathfrak{S}\mathrm{CB}^{-1} + \mathrm{B}^{-1}.\mathfrak{S}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{C} - \mathrm{C}.\mathfrak{S}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^{-1}.$$

On peut vérifier que cette formule équivaut à ce que devient

la valeur générale trouvée plus haut, lorsqu'on y introduit les conditions de coplanarité. Il faut prouver que l'on a, dans ce cas,

$$(\mathfrak{S}\mathrm{AB})^{-1}(\mathrm{A}^{-1}.\mathfrak{S}\mathrm{AC} + \mathrm{B}^{-1}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} - \mathrm{C}) = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{CB}^{-1}.$$

On en tire, en effet, en représentant le premier membre par X,

$$\mathrm{AXB} = (\mathfrak{S}\mathrm{AB})^{-1}(\mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AC} + \mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} - \mathrm{ACB});$$

or, à cause de $\mathfrak{S}\mathrm{ACB} = 0$, on a

$$\mathrm{ACB} = \mathfrak{V}\mathrm{ACB} = \mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{CB} + \mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AC} - \mathrm{C}.\mathfrak{S}\mathrm{AB}.$$

Donc la valeur de AXB se réduit à C, et par suite

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{CB}^{-1}.$$

578. II. Soit l'équation

$$\square\mathrm{X} = \mathfrak{V}\mathrm{ABX} = \mathrm{C},$$

et supposons d'abord A, B, C non-coplanaires. On pourra alors prendre ces vecteurs pour $\mathrm{L}, \mathrm{M}, \mathrm{N}$. On aura [art. 570, (10)]

$$\square'\mathrm{X} = \mathfrak{V}(\overline{\mathrm{AB}}.\mathrm{X}) = \mathfrak{V}\mathrm{BAX}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} m.\mathfrak{S}\mathrm{ABC} &= \mathfrak{S}(\mathrm{BA}^2.\mathrm{BAB}.\mathfrak{V}\mathrm{BAC}) = \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2.\mathfrak{S}(\mathrm{AB}.\mathfrak{V}\mathrm{BAC}) \\ &= \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2.\mathfrak{S}.\mathrm{AB}(\mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AC} + \mathrm{C}.\mathfrak{S}\mathrm{AB} - \mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BC}) \\ &= \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2.\mathfrak{S}\mathrm{ABC}.\mathfrak{S}\mathrm{AB}, \end{aligned}$$

d'où

$$m = \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2.\mathfrak{S}\mathrm{AB};$$

$$\begin{aligned} m_1.\mathfrak{S}\mathrm{ABC} &= \mathfrak{S}(\mathrm{A}.\mathrm{BAB}.\mathfrak{V}\mathrm{BAC} + \mathrm{BA}^2.\mathrm{B}.\mathfrak{V}\mathrm{BAC} + \mathrm{BA}^2.\mathrm{BAB}.\mathrm{C}) \\ &= \mathfrak{S}[(\mathrm{ABAB} + \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2)\mathfrak{V}\mathrm{BAC} + \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2\mathrm{ABC}] \\ &= \mathfrak{S}.\mathrm{AB}(\mathrm{AB} + \mathrm{BA})\mathfrak{V}\mathrm{BAC} + \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2.\mathfrak{S}\mathrm{ABC} \\ &= 2\mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathfrak{S}[\mathrm{AB}(\mathrm{BAC} - \mathfrak{S}\mathrm{BAC})] + \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2.\mathfrak{S}\mathrm{ABC} \\ &= [2(\mathfrak{S}\mathrm{AB})^2 + \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2]\mathfrak{S}\mathrm{ABC}, \end{aligned}$$

d'où

$$m_1 = 2(\mathfrak{S}\mathrm{AB})^2 + \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2;$$

$$\begin{aligned} m_2.\mathfrak{S}\mathrm{ABC} &= \mathfrak{S}(\mathrm{AB}.\mathfrak{V}\mathrm{BAC} + \mathrm{A}.\mathrm{BAB}.\mathrm{C} + \mathrm{BA}^2.\mathrm{BC}) \\ &= \mathfrak{S}.\mathrm{AB}(\mathrm{BAC} - \mathfrak{S}\mathrm{BAC}) + \mathfrak{S}[\mathrm{AB}(\mathrm{AB} + \mathrm{BA})\mathrm{C}] \\ &= 3\mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathfrak{S}\mathrm{ABC}, \end{aligned}$$

d'où

$$m_2 = 3\mathfrak{S}\mathrm{AB}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} m\mathrm{X} &= \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2.\mathfrak{S}\mathrm{AB}.\square^{-1}\mathrm{C} \\ &= [2(\mathfrak{S}\mathrm{AB})^2+\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2]\mathrm{C} - 3\mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathfrak{V}\mathrm{ABC} + \mathfrak{V}(\mathrm{AB}.\mathfrak{V}\mathrm{ABC}). \end{aligned}$$

On a maintenant

$$\mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathfrak{V}\mathrm{ABC} = \mathfrak{S}\mathrm{AB}.(\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} - \mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AC} + \mathrm{C}.\mathfrak{S}\mathrm{AB}),$$

et, à cause de $\mathfrak{V}\mathrm{ABA} = \mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BA} - \mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{A}^2 + \mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{AB} = 2\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{AB} - \mathrm{A}^2\mathrm{B}$,

$$\mathfrak{V}(\mathrm{AB}.\mathfrak{V}\mathrm{ABC}) = (2\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{AB} - \mathrm{A}^2\mathrm{B})\mathfrak{S}\mathrm{BC} - \mathrm{AB}^2.\mathfrak{S}\mathrm{AC} + \mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathfrak{V}\mathrm{ABC}.$$

Donc, en faisant, pour abréger, $\mathfrak{S}\mathrm{BC} = \alpha$, $\mathfrak{S}\mathrm{AC} = \beta$, $\mathfrak{S}\mathrm{AB} = \gamma$,

$$\begin{aligned} m\mathrm{X} &= (2\gamma^2+\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2)\mathrm{C} - 2\gamma(\alpha\mathrm{A} - \beta\mathrm{B} + \gamma\mathrm{C}) + (2\alpha\gamma - \beta\mathrm{B}^2)\mathrm{A} - \alpha\mathrm{A}^2\mathrm{B} \\ &= -\beta\mathrm{B}^2\mathrm{A} + (2\beta\gamma - \alpha\mathrm{A}^2)\mathrm{B} + \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2\mathrm{C}, \end{aligned}$$

ou

$$(1)\quad \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2.\mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathrm{X} = -\mathfrak{S}\mathrm{AC}.\mathrm{B}^2\mathrm{A} + (2\mathfrak{S}\mathrm{AC}.\mathfrak{S}\mathrm{AB} - \mathrm{A}^2\mathfrak{S}\mathrm{BC})\mathrm{B} + \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2\mathrm{C}.$$

579. On peut résoudre la même équation, sans employer la méthode générale, en procédant comme il suit. On a

$$\mathrm{C} = \mathfrak{V}\mathrm{ABX} = \mathrm{X}.\mathfrak{S}\mathrm{AB} + \mathfrak{V}(\mathfrak{V}\mathrm{AB}.\mathrm{X}).$$

En opérant par $\mathfrak{S}.(\mathfrak{V}\mathrm{AB})\times$, on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(\mathfrak{V}\mathrm{AB}.\mathrm{C}) &= \mathfrak{S}\mathrm{ABC} \\ &= \mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathfrak{S}(\mathfrak{V}\mathrm{AB}.\mathrm{X}) + \mathfrak{S}[\mathfrak{V}\mathrm{AB}.\mathfrak{V}(\mathfrak{V}\mathrm{AB}.\mathrm{X})] \\ &= \mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathfrak{S}\mathrm{ABX} + \mathfrak{S}[(\mathfrak{V}\mathrm{AB})^2\mathrm{X}] = \mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathfrak{S}\mathrm{ABX}. \end{aligned}$$

En ajoutant cette équation à l'équation donnée, multipliée par $\mathfrak{S}\mathrm{AB}$, il vient

$$\mathrm{C}.\mathfrak{S}\mathrm{AB} + \mathfrak{S}\mathrm{ABC} = \mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathrm{ABX},$$

d'où l'on tire

$$(2)\qquad \mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathrm{X} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{C}.\mathfrak{S}\mathrm{AB} + \mathfrak{S}\mathrm{ABC}),$$

solution qui se présente sous une forme plus simple que la précédente (1).

Pour montrer que ces deux solutions s'accordent, multiplions l'équation (2) par A^2B^2; ce qui donne

$$A^2B^2.\mathfrak{S}AB.X = BAC.\mathfrak{S}AB + BA.\mathfrak{S}ABC.$$

Le second membre est un vecteur, sa partie réelle

$$\mathfrak{S}BAC.\mathfrak{S}AB + \mathfrak{S}BA.\mathfrak{S}ABC$$

étant nulle [art. 546, (7)]. On peut donc écrire l'équation sous la forme

$$A^2B.\mathfrak{S}AB.X = \mathfrak{V}BAC.\mathfrak{S}AB - \mathfrak{V}AB.\mathfrak{S}ABC,$$

ou, en y ajoutant la quantité nulle

$$-C.\mathfrak{S}(AB.\mathfrak{V}AB) + A.\mathfrak{S}(B.\mathfrak{V}AB.C) + B.\mathfrak{S}(\mathfrak{V}AB.AC) + \mathfrak{V}AB.\mathfrak{S}ABC$$

[art. 549, (15)],

$$\begin{aligned} &A^2B^2.\mathfrak{S}AB.X \\ &= \mathfrak{V}(BAC.\mathfrak{S}AB) - C.\mathfrak{S}(AB.\mathfrak{V}AB) + A.\mathfrak{S}(B.\mathfrak{V}AB.C) + B.\mathfrak{S}(\mathfrak{V}AB.AC). \end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}BAC &= B.\mathfrak{S}AC - A.\mathfrak{S}BC + C.\mathfrak{S}BA, \\ \mathfrak{S}(B.\mathfrak{V}AB.C) &= -\mathfrak{S}(\mathfrak{V}AB.BC) = -\mathfrak{S}(AB.BC - \mathfrak{S}AB.BC) \\ &= -B^2.\mathfrak{S}AC + \mathfrak{S}AB.\mathfrak{S}BC, \\ \mathfrak{S}(\mathfrak{V}AB.AC) &= -\mathfrak{S}(A.\mathfrak{V}AB.C) = -A^2.\mathfrak{S}BC + \mathfrak{S}AB.\mathfrak{S}AC, \\ \mathfrak{S}(AB.\mathfrak{V}AB) &= -\mathfrak{S}(BA.\mathfrak{V}AB) = -A^2B^2 + (\mathfrak{S}AB)^2, \end{aligned}$$

Donc, en substituant ces valeurs et réduisant, on a

$$A^2B^2.\mathfrak{S}AB.X = -AB^2.\mathfrak{S}AC + B(2\mathfrak{S}AB.\mathfrak{S}AC - A^2.\mathfrak{S}BC) + A^2B^2C,$$

ce qui est bien la valeur trouvée plus haut.

580. Si les vecteurs A, B, C sont coplanaires, on a alors

$$\begin{aligned} 0 = \mathfrak{S}ABC &= \mathfrak{S}(AB.\mathfrak{V}ABX) \\ &= \mathfrak{S}(ABA.\mathfrak{S}BX - AB^2.\mathfrak{S}AX + ABX.\mathfrak{S}AB) \\ &= \mathfrak{S}ABX.\mathfrak{S}AB, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut que X est coplanaire avec A, B, C. On a donc

$$\mathrm{ABX} = \mathrm{C}, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{X} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{C},$$

ou encore

$$\mathrm{X} = \mathrm{B}^{-1}.\mathfrak{S}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{C} - \mathrm{A}^{-1}.\mathfrak{S}\mathrm{B}^{-1}\mathrm{C} + \mathrm{C}.\mathfrak{S}\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}.$$

581. III. Soit proposé de résoudre l'équation

$$\mathfrak{V}\mathrm{EX} = \mathrm{C}, \tag{3}$$

E et C étant des vecteurs. Nous allons commencer par déduire la solution de cette équation de celle de l'équation $\mathfrak{V}\mathrm{ABX} = \mathrm{C}$, ce qui nous donnera l'occasion d'examiner certains cas dans lesquels les quantités m s'évanouissent, et de montrer l'usage des fonctions évanouissantes dans la théorie des quaternions. Nous trouverons ensuite des solutions beaucoup plus simples.

Si, dans l'équation (1) de l'art. 578, nous posons

$$\mathrm{AB} = e_0 + \mathrm{E},$$

e_0 étant un nombre réel, on obtiendra la solution de l'équation (3) en faisant tendre e_0 vers zéro.

On a, dans ce cas,

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2 &= \mathrm{AB}.\overline{\mathrm{AB}} = (e_0 + \mathrm{E})(e_0 - \mathrm{E}) = e_0^2 - \mathrm{E}^2,\\
\mathrm{AB}^2.\mathfrak{S}\mathrm{AC} + \mathrm{A}^2\mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} &= \mathrm{AB}.\mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AC} + \mathrm{BA}.\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BC}\\
&= (e_0 + \mathrm{E})\mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AC} + (e_0 - \mathrm{E})\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BC}\\
&= e_0(\mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AC} + \mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BC}) + \mathrm{E}(\mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AC} - \mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BC}).
\end{aligned}$$

Or on a [art. 547, (9)]

$$\mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AC} - \mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} = \mathfrak{V}(\mathrm{C}.\mathfrak{V}\mathrm{AB}) = \mathfrak{V}\mathrm{CE}.$$

L'expression précédente se réduit donc à

$$e_0(\mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AC} + \mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BC}) + \mathrm{E}.\mathfrak{V}\mathrm{CE}.$$

Par suite, la solution de l'équation sera donnée par la formule

$$\begin{aligned}
(e_0^2 - \mathrm{E}^2)e_0\mathrm{X}\\
&= (e_0^2 - \mathrm{E}^2)\mathrm{C} + 2e_0.\mathfrak{S}\mathrm{AC}.\mathrm{B} - e_0(\mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AC} + \mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BC}) - \mathrm{E}.\mathfrak{V}\mathrm{CE}\\
&= (e_0^2 - \mathrm{E}^2)\mathrm{C} + e_0.\mathfrak{V}(\mathrm{C}.\mathfrak{V}\mathrm{AB}) - \mathrm{E}.\mathfrak{V}\mathrm{CE},
\end{aligned}$$

Or $\mathfrak{S}(\text{E}\,.\,\mathfrak{V}\text{CE}) = \mathfrak{S}\text{ECE} = 0$; donc $\text{E}.\mathfrak{V}\text{CE}$ est un vecteur égal à $-\mathfrak{V}\text{CE}\,.\,\text{E} = (\mathfrak{S}\text{CE} - \text{CE})\,\text{E} = \text{E}\,.\,\mathfrak{S}\text{CE} - \text{CE}^2$. D'après cela, l'équation précédente devient

$$(c_0^2 - \text{E}^2)e_0\text{X} = e_0^2\text{C} + e_0.\mathfrak{V}\text{CE} - \text{E}.\mathfrak{S}\text{CE},$$

d'où, en divisant par e_0, et faisant ensuite $e_0 = 0$,

$$-\text{E}^2\text{X} = \mathfrak{V}\text{CE} - \text{E}.\lim_{e_0=0}\frac{\mathfrak{S}\text{CE}}{e_0}.$$

Mais, par la forme même de l'équation proposée, on voit que l'on doit avoir

$$\mathfrak{S}\text{CE} = \mathfrak{S}(\text{E}.\mathfrak{V}\text{EX}) = \mathfrak{S}\text{E}^2\text{X} = 0;$$

donc la limite de $\dfrac{\mathfrak{S}\text{CE}}{e_0}$ est indéterminée, et l'on peut la remplacer par une quantité réelle arbitraire h_0. Donc la solution cherchée est

$$\text{X} = -\mathfrak{V}\text{CE}^{-1} + h_0\text{E}^{-1},$$

ou encore, à cause de $\mathfrak{S}\text{CE} = 0$,

$$\text{X} = \text{E}^{-1}(h_0 + \text{C}).$$

En effet, cette équation donne bien $\text{EX} = h_0 + \text{C}$, d'où $\mathfrak{V}\text{EX} = \text{C}$.

582. De là un mode de solution très simple. On a, quel que soit h_0, $\mathfrak{V}\text{E}h_0\text{E}^{-1} = 0$, d'où il s'ensuit que

$$\mathfrak{V}.\text{E}(\text{X} - h_0\text{E}^{-1}) = \mathfrak{V}\text{EX} = \text{C}$$

est un vecteur constant, quel que soit h_0. Donc

$$\text{E}(\text{X} - h_0\text{E}^{-1}) = \text{EX} - h_0 = c_0 + \text{C},$$

d'où l'on tire la solution précédente, en écrivant h_0 au lieu de $h_0 + c_0$.

583. Appliquons maintenant à la même équation la méthode générale. Prenons pour $\text{L}, \text{M}, \text{N}$ les vecteurs E, C et EC, ce

dernier produit devant être un vecteur si l'on veut que x en soit un (art. 581). On a alors

$$\square' x = \mathfrak{V} x e,$$

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{V} ec.ec) = \mathfrak{S}(ec.ec) = -\mathfrak{S}(ec.\overline{ec}) = -\mathfrak{S}(ec.ce) = -e^2c^2;$$

$$-e^2c^2.m = \mathfrak{S}[\mathfrak{V}(e^2).\mathfrak{V} ce.\mathfrak{V} e^2c] = 0,$$

d'où $m = 0$;

$$-e^2c^2.m_1 = \mathfrak{S}[e.\mathfrak{V} ce.\mathfrak{V} ece + \mathfrak{V}(e^2).c.\mathfrak{V} ece + \mathfrak{V}(e^2).\mathfrak{V} ce.e]$$
$$= \mathfrak{S}[e.\mathfrak{V} ce.\mathfrak{V}(e.\mathfrak{V} ce)] = \mathfrak{S}(e.ce.e.ce) = e^4c^2,$$

d'où $m_1 = -e^2$;

$$-e^2c^2.m_2 = \mathfrak{S}[ec.\mathfrak{V} ece + e.\mathfrak{V} ce.ec + \mathfrak{V}(e^2).cec]$$
$$= \mathfrak{S}(ec.e.ce) = 0,$$

d'où $m_2 = 0$.

L'équation cubique en $\square$ devient donc

$$-e^2\square + \square^3 = 0,$$

d'où l'on tire

$$\square^{-1} = \frac{1}{e^2}\square + \square^{-2}0,$$

$$x = \square^{-1}c = \frac{1}{e^2}\mathfrak{V} ec + \square^{-2}0.$$

Or l'équation $\square^2 z = 0$ peut s'écrire sous la forme

$$0 = \mathfrak{V}(e.\mathfrak{V} ez) = \mathfrak{V}[e(ez - \mathfrak{S} ez)] = e^2z - e.\mathfrak{S} ez.$$

Donc, si z n'est pas nul, il faut qu'il soit parallèle à e, et de la forme $h_0 e$, d'où

$$z = \square^{-2}0 = h_0 e,$$

et partant

$$x = \frac{1}{e^2}.\mathfrak{V} ec + h_0 e.$$

584. IV. Prenons enfin l'équation

$$\square x = a.\mathfrak{S} bx + a'.\mathfrak{S} b'x + a''.\mathfrak{S} b''x = c,$$

à laquelle peut se ramener le cas le plus général d'une équation linéaire (¹). On a

$$\square' x = b.\mathfrak{S}ax + b'.\mathfrak{S}a'x + b''.\mathfrak{S}a''x.$$

En prenant pour l, m, n les vecteurs a, a', a'', qui ne sont pas généralement coplanaires, on a

$$\mathfrak{S}(\square' a.\square' a'.\square' a'') = \mathfrak{S}.(b.\mathfrak{S}aa + b'.\mathfrak{S}a'a + b''.\mathfrak{S}a''a)\times\ldots\times\ldots$$

$$= \mathfrak{S}bb'b''.\begin{vmatrix} \mathfrak{S}aa & \mathfrak{S}a'a & \mathfrak{S}a''a \\ \mathfrak{S}aa' & \mathfrak{S}a'a' & \mathfrak{S}a''a' \\ \mathfrak{S}aa'' & \mathfrak{S}a'a'' & \mathfrak{S}a''a'' \end{vmatrix}.$$

Or on a

$$\mathfrak{S}a'a'.\mathfrak{S}a''a'' - \mathfrak{S}a''a'.\mathfrak{S}a'a'' = \mathfrak{S}(a''a'.a'a'') - \mathfrak{S}a''a'.\mathfrak{S}a'a''$$
$$= \mathfrak{S}[a''a'.(a'a'' - \mathfrak{S}a'a'')] = \mathfrak{S}(a''a'.\mathfrak{V}a'a'') = -\mathfrak{S}(\mathfrak{V}a'a''.\mathfrak{V}a'a''),$$
$$\mathfrak{S}a''a'.\mathfrak{S}aa'' - \mathfrak{S}aa'.\mathfrak{S}a''a'' = \mathfrak{S}aa''.\mathfrak{S}a''a' - \mathfrak{S}(aa''.a''a')$$
$$= \mathfrak{S}[aa''(\mathfrak{S}a''a' - a''a')] = \mathfrak{S}(aa''.\mathfrak{V}a'a'') = -\mathfrak{S}(\mathfrak{V}a''a.\mathfrak{V}a'a''),$$
$$\mathfrak{S}aa'.\mathfrak{S}a'a'' - \mathfrak{S}a'a'.\mathfrak{S}aa'' = \mathfrak{S}aa'.\mathfrak{S}a'a'' - \mathfrak{S}(aa'.a'a'')$$
$$= -\mathfrak{S}(\mathfrak{V}aa'.\mathfrak{V}a'a'').$$

(¹) En effet, soient b, b', b'' trois vecteurs non coplanaires quelconques, et déterminons trois autres vecteurs c, c', c'' par les conditions

$$c\ .\mathfrak{S}bb'b'' = \mathfrak{V}b'b'',$$
$$c'.\mathfrak{S}bb'b'' = \mathfrak{V}b''b,$$
$$c''.\mathfrak{S}bb'b'' = \mathfrak{V}bb'.$$

Si x est un vecteur quelconque, on aura identiquement [art. 550, (16)]

$$x.\mathfrak{S}bb'b'' = \mathfrak{V}b'b''.\mathfrak{S}bx + \mathfrak{V}b''b.\mathfrak{S}b'x + \mathfrak{V}bb'.\mathfrak{S}b''x,$$

ou, en ayant égard aux relations précédentes,

$$x = c.\mathfrak{S}bx + c'.\mathfrak{S}b'x + c''.\mathfrak{S}b''x.$$

Si l'on pose maintenant, quelle que soit la fonction linéaire et homogène $\square$,

$$\square c = a, \qquad \square c' = a', \qquad \square c'' = a'',$$

il viendra

$$\square x = a.\mathfrak{S}bx + a'.\mathfrak{S}b'x + a''.\mathfrak{S}b''x,$$

d'où l'on voit que le premier membre de toute équation $\square x = c$ est réductible à la forme trinôme que nous considérons, et qui peut être regardée comme la forme type.

Donc le déterminant a pour valeur

$$-\mathfrak{S}AA.\mathfrak{S}(\mathfrak{V}A'A''.\mathfrak{V}A'A'')-\mathfrak{S}AA'.\mathfrak{S}(\mathfrak{V}A''A.\mathfrak{V}A'A'')-\mathfrak{S}AA''.\mathfrak{S}(\mathfrak{V}AA'.\mathfrak{V}A'A'')$$
$$=-\mathfrak{S}.A[A.\mathfrak{S}(A'A''.\mathfrak{V}A'A'')+A'.\mathfrak{S}(A''A.\mathfrak{V}A'A'')+A''\mathfrak{S}(AA'.\mathfrak{V}A'A'')].$$

Or, d'après la formule (15) de l'art. 549, la quantité entre crochets est égale à $\mathfrak{V}A'A''.\mathfrak{S}AA'A''$. Donc la valeur du déterminant est

$$-\mathfrak{S}[A.\mathfrak{V}A'A''.\mathfrak{S}AA'A'']=-\mathfrak{S}AA'A'')^2,$$

et par conséquent

$$m=-\mathfrak{S}AA'A''.\mathfrak{S}BB'B''.$$

On a ensuite

$$\mathfrak{S}(A.\square'A'.\square'A'')$$
$$=\mathfrak{S}[A.(B.\mathfrak{S}AA'+B'.\mathfrak{S}A'A'+B''.\mathfrak{S}A''A').(B.\mathfrak{S}AA''+B'.\mathfrak{S}A'A''+B''.\mathfrak{S}A''A'')]$$
$$=\mathfrak{S}[B'B''.A.(\mathfrak{S}A'A'.\mathfrak{S}A''A''-\mathfrak{S}A''A'.\mathfrak{S}A'A'')]+\ldots$$
$$=-\mathfrak{S}[B'B''A.\mathfrak{S}(A'A''.\mathfrak{V}A'A'')+B''BA.\mathfrak{S}(A''A.\mathfrak{V}A'A'')+BB'A.\mathfrak{S}(AA'.\mathfrak{V}A'A'')].$$

On aura de même

$$\mathfrak{S}(\square'A.A'.\square'A'')=-\mathfrak{S}[B'B''A'.\mathfrak{S}(A''A.\mathfrak{V}A'A'')+\ldots],$$
$$\mathfrak{S}(\square'A.\square'A'.A'')=-\mathfrak{S}[B'B''A''.\mathfrak{S}(AA'.\mathfrak{V}A'A'')+\ldots],$$

d'où l'on tire, en faisant la somme et ayant égard à la formule (15) de l'art. 549, le numérateur de m_1

$$=-\mathfrak{S}.B'B''[A.\mathfrak{S}(A'A''.\mathfrak{V}A'A'')+A'.\mathfrak{S}(A''A.\mathfrak{V}A'A'')+A''.\mathfrak{S}(AA'.\mathfrak{V}A'A'')]+\ldots$$
$$=-\mathfrak{S}[B'B''.\mathfrak{V}A'A''.\mathfrak{S}AA'A''+B''B.\mathfrak{V}A''A.\mathfrak{S}A'A''A+BB'.\mathfrak{V}AA'.\mathfrak{S}A''AA']$$
$$=-\mathfrak{S}AA'A''.\mathfrak{S}(\mathfrak{V}A'A''.\mathfrak{V}B'B''+\mathfrak{V}A''A.\mathfrak{V}B''B+\mathfrak{V}AA'.\mathfrak{V}BB').$$

Donc

$$m_1=-\mathfrak{S}(\mathfrak{V}A'A''.\mathfrak{V}B'B''+\mathfrak{V}A''A.\mathfrak{V}B''B+\mathfrak{V}AA'.\mathfrak{V}BB').$$

Enfin

$$\mathfrak{S}(\square A.A'A'')=\mathfrak{S}[\mathfrak{S}AA.BA'A''+\mathfrak{S}AA'.B'A'A''+\mathfrak{S}AA''.B''A'A''].$$

Formant de même les deux autres termes du numérateur de m_1, et ajoutant, on trouve, en vertu de la formule (16) de

l'art. 550,

$$\begin{aligned}&\mathfrak{S}[\mathrm{B}(\mathrm{A'A''}.\mathfrak{S}\mathrm{AA} + \mathrm{A''A}.\mathfrak{S}\mathrm{AA'} + \mathrm{AA'}.\mathfrak{S}\mathrm{AA''}) + \ldots]\\ &= \mathfrak{S}[\mathrm{B}(\mathfrak{V}\mathrm{A'A''}.\mathfrak{S}\mathrm{AA} + \mathfrak{V}\mathrm{A''A}.\mathfrak{S}\mathrm{AA'} + \mathfrak{V}\mathrm{AA'}.\mathfrak{S}\mathrm{AA''}) + \ldots]\\ &= \mathfrak{S}(\mathrm{BA}.\mathfrak{S}\mathrm{AA'A''} + \mathrm{B'A'}.\mathfrak{S}\mathrm{A'A''A} + \mathrm{B''A'}.\mathfrak{S}\mathrm{A''AA'}),\end{aligned}$$

d'où

$$m_2 = \mathfrak{S}(\mathrm{AB} + \mathrm{A'B'} + \mathrm{A''B''}).$$

Par conséquent, on a, pour la solution cherchée,

$$\begin{aligned}-\mathfrak{S}\mathrm{AA'A''}.\mathfrak{S}\mathrm{BB'B''X} = &-\mathfrak{S}(\mathfrak{V}\mathrm{A'A''}.\mathfrak{V}\mathrm{B'B''} + \mathfrak{V}\mathrm{A''A}.\mathfrak{V}\mathrm{B''B} + \mathfrak{V}\mathrm{AA'}.\mathfrak{V}\mathrm{BB'}).\mathrm{C}\\ &-\mathfrak{S}(\mathrm{AB} + \mathrm{A'B'} + \mathrm{A''B''}).\square\mathrm{C} + \square^2\mathrm{C}.\end{aligned}$$

585. On peut arriver plus simplement à ce résultat. Si l'on opère, en effet, sur l'équation successivement par $\mathfrak{S}\mathrm{A'A''}\times$, $\mathfrak{S}\mathrm{A''A}\times$, $\mathfrak{S}\mathrm{AA'}\times$, il vient

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}\mathrm{A'A''A}.\mathfrak{S}\mathrm{B\,X} &= \mathfrak{S}\mathrm{A'A''C},\\ \mathfrak{S}\mathrm{A''AA'}.\mathfrak{S}\mathrm{B'X} &= \mathfrak{S}\mathrm{A''AC},\\ \mathfrak{S}\mathrm{AA'A''}.\mathfrak{S}\mathrm{B''X} &= \mathfrak{S}\mathrm{AA'C}.\end{aligned}$$

De ces équations on tire [art. 550, (16)], en les multipliant respectivement par $\mathfrak{V}\mathrm{B'B''}$, $\mathfrak{V}\mathrm{B''B}$, $\mathfrak{V}\mathrm{BB'}$, et faisant la somme,

$$\mathfrak{S}\mathrm{AA'A}.\mathfrak{S}\mathrm{BB'B''}.\mathrm{X} = \mathfrak{V}\mathrm{B'B''}.\mathfrak{S}\mathrm{A'A''C} + \mathfrak{V}\mathrm{B''B}.\mathfrak{S}\mathrm{A''AC} + \mathfrak{V}\mathrm{BB'}.\mathfrak{S}\mathrm{AA'C}.$$

On peut vérifier comme il suit l'identité de cette valeur avec celle que donne la méthode générale. On a, en effet [art. 549, (15)],

$$\begin{aligned}&\mathfrak{V}\mathrm{B'B''}.\mathfrak{S}\mathrm{A'A''C}\\ &\quad= \mathrm{A'}.\mathfrak{S}(\mathrm{A''C}.\mathfrak{V}\mathrm{B'B''}) + \mathrm{A''}.\mathfrak{S}(\mathrm{CA'}.\mathfrak{V}\mathrm{B'B''}) + \mathrm{C}.\mathfrak{S}(\mathrm{A'A''}.\mathfrak{V}\mathrm{B'B''})\\ &\quad= \mathrm{A'}.\mathfrak{S}[\mathrm{A''}.\mathfrak{V}(\mathrm{C}.\mathfrak{V}\mathrm{B'B''})] + \ldots\\ &\quad= \mathrm{A'}.(\mathfrak{S}\mathrm{A''B''}.\mathfrak{S}\mathrm{CB'} - \mathfrak{S}\mathrm{A''B'}.\mathfrak{S}\mathrm{CB''})\\ &\qquad\qquad + \mathrm{A''}.(\mathfrak{S}\mathrm{C'B''}.\mathfrak{S}\mathrm{A'B'} - \mathfrak{S}\mathrm{CB'}.\mathfrak{S}\mathrm{A'B''}) + \mathrm{C}.\mathfrak{S}(\mathrm{A'A''}.\mathfrak{V}\mathrm{B'B''}).\end{aligned}$$

Traitant les deux autres termes de la même manière, on trouve

$$\begin{aligned}&\mathfrak{S}\mathrm{AA'A''}.\mathfrak{S}\mathrm{BB'B''}.\mathrm{X}\\ &\quad= \mathrm{A}(\mathfrak{S}\mathrm{A'B'}.\mathfrak{S}\mathrm{CB} - \mathfrak{S}\mathrm{A'B}.\mathfrak{S}\mathrm{CB'} + \mathfrak{S}\mathrm{A''B''}.\mathfrak{S}\mathrm{CB} - \mathfrak{S}\mathrm{A''B}.\mathfrak{S}\mathrm{CB''})\\ &\qquad + \mathrm{A'}(\ldots) + \mathrm{A''}(\ldots)\\ &\qquad + \mathrm{C}[\mathfrak{S}(\mathrm{A'A''}.\mathfrak{V}\mathrm{B'B''}) + \mathfrak{S}(\mathrm{A''A}.\mathfrak{V}\mathrm{B''D}) + \mathfrak{S}(\mathrm{AA'}.\mathfrak{V}\mathrm{BB'})]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{A}\,[\mathfrak{S}\mathrm{BC}.(\mathfrak{S}\mathrm{AB}+\mathfrak{S}\mathrm{A'B'}+\mathfrak{S}\mathrm{A''B''})-\mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathfrak{S}\mathrm{BC}-\mathfrak{S}\mathrm{A'B}.\mathfrak{S}\mathrm{B'C}-\mathfrak{S}\mathrm{A''B}.\mathfrak{S}\mathrm{B''C}]\\
&\quad + \mathrm{A'}[\ldots] + \mathrm{A''}[\ldots] + \mathrm{C}\,[\mathfrak{S}(\mathrm{A'A''}.\mathfrak{V}\mathrm{B'B''}) + \ldots]\\
&= (\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} + \mathrm{A'}.\mathfrak{S}\mathrm{B'C} + \mathrm{A''}.\mathfrak{S}\mathrm{B''C})\,(\mathfrak{S}\mathrm{AB} + \mathfrak{S}\mathrm{A'B'} + \mathfrak{S}\mathrm{A''B''})\\
&\quad - \mathrm{A}.\mathfrak{S}\,[\mathrm{B}\,(\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} + \mathrm{A'}.\mathfrak{S}\mathrm{B'C} + \mathrm{A''}.\mathfrak{S}\mathrm{B''C})]\\
&\quad - \mathrm{A'}.\mathfrak{S}\,[\mathrm{B'}\,(\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} + \ldots)] - \mathrm{A''}.\mathfrak{S}\,[\mathrm{B''}\,(\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} + \ldots)]\\
&\quad + \mathrm{C}\,[\mathfrak{S}(\mathrm{A'A''}.\mathfrak{V}\mathrm{B'B''}) + \ldots]\\
&= \square\mathrm{C}.\sum\mathrm{AB} - \square^2\mathrm{C} + \mathrm{C}.\sum\mathfrak{S}(\mathrm{AA'}.\mathfrak{V}\mathrm{BB'}),
\end{aligned}
$$

valeur qui coïncide avec celle de l'art. précédent, à cause de $\mathfrak{S}(\mathrm{AA'}.\mathfrak{V}\mathrm{BB'}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{V}\mathrm{AA'}.\mathfrak{V}\mathrm{BB'})$, etc.

586. On voit par ce qui précède que, dans les divers cas particuliers, on peut le plus souvent trouver des procédés directs plus courts que l'emploi de la méthode générale. Mais outre son application à la résolution des équations, la méthode d'Hamilton est surtout importante parce qu'elle nous apprend à exprimer les inverses de certaines fonctions de $\square$, telles que $(\square - g)^{-1}$, à l'aide d'opérations directes, propriété qui est de la plus grande utilité dans les applications, et aussi parce qu'elle conduit à l'équation fondamentale du troisième degré

$$\square^3 - m_2\square^2 + m_1\square - m = 0,$$

qui résulte immédiatement de l'équation de l'art. 574, et qui joue un rôle considérable dans le problème de la détermination des axes des surfaces du second degré et dans ceux qui lui sont analogues.

587. D'après ce que nous avons vu (art. 574), on peut déterminer trois coefficients réels m, m_1, m_2, tels que l'équation

$$(\square^3 - m_2\square^2 + m_1\square - m)\,\mathrm{X} = 0, \tag{1}$$

que nous représenterons, pour abréger, par

$$\varphi(\square)\,\mathrm{X} = 0, \tag{2}$$

soit satisfaite identiquement par un vecteur quelconque X.

Si l'on désigne par g_1, g_2, g_3 les racines de l'équation cubique

$$\varphi(g) = g^3 - m_2 g^2 + m_1 g - m = 0, \tag{3}$$

l'équation (1) pourra s'écrire symboliquement sous la forme

$$(\square - g_1)(\square - g_2)(\square - g_3)\mathrm{x} = 0. \tag{4}$$

Cela posé, cherchons la condition pour qu'un vecteur x soit parallèle au vecteur $\square$x, c'est-à-dire pour que l'opération $\square$, appliquée à x, n'en change pas la direction. On devra avoir, g désignant un nombre réel,

$$\square \mathrm{x} = g\mathrm{x} \text{ (1)}, \tag{5}$$

d'où

$$\square^2 \mathrm{x} = g \square \mathrm{x} = g^2 \mathrm{x}, \qquad \square^3 \mathrm{x} = g^2 \square \mathrm{x} = g^3 \mathrm{x},$$

et, en substituant dans l'équation (1), à laquelle tout vecteur doit satisfaire,

$$(g^3 - m_2 g^2 + m_1 g - m)\mathrm{x} = 0,$$

ce qui exige que le coefficient g soit l'une des racines de l'équation (3). Il faudra donc prendre pour x un vecteur satisfaisant à l'une des équations que l'on obtient en remplaçant, dans (5), g par l'une des valeurs g_1, g_2, g_3, savoir, un des vecteurs x_1, x_2, x_3, tels que

$$(\square - g_1)\mathrm{x}_1 = 0, \quad (\square - g_2)\mathrm{x}_2 = 0, \quad (\square - g_3)\mathrm{x}_3 = 0. \tag{6}$$

588. Supposons les trois racines g_1, g_2, g_3 réelles et inégales. Si x_1, x_2, x_3 sont trois vecteurs non coplanaires quelconques, on peut décomposer le vecteur quelconque x suivant leurs directions, et l'on a, α_1, α_2, α_3 étant trois quantités réelles,

$$\mathrm{x} = \alpha_1 \mathrm{x}_1 + \alpha_2 \mathrm{x}_2 + \alpha_3 \mathrm{x}_3. \tag{7}$$

---

(1) Cette équation peut encore s'écrire sous la forme d'une équation du second degré

$$\mathfrak{V}(\mathrm{x} . \square \mathrm{x}) = 0.$$

Opérons par $\square - g_1$ sur les deux membres de cette égalité; il viendra

$$(\square - g_1)\mathrm{x} = \alpha_1(\square - g_1)\mathrm{x}_1 + \alpha_2(\square - g_1)\mathrm{x}_2 + \alpha_3(\square - g_1)\mathrm{x}_3.$$

Si maintenant x_1, x_2, x_3 sont les trois directions qui satisfont respectivement aux équations (6), $(\square - g_1)\mathrm{x}_1$ s'annulera; ensuite, x_2 étant parallèle à $\square\mathrm{x}_2$ et par suite à $(\square - g_1)\mathrm{x}_2$, et x_3 étant de même parallèle à $(\square - g_1)\mathrm{x}_3$, on voit que $(\square - g_1)\mathrm{x}$ se réduira à la forme

$$(\square - g_1)\mathrm{x} = \alpha'_2\mathrm{x}_2 + \alpha'_3\mathrm{x}_3,$$

α'_2 et α'_3 étant de nouvelles constantes réelles. Donc l'opération $\square - g_1$ fait perdre à un vecteur quelconque x sa composante parallèle à x_1, et par conséquent $(\square - g_1)\mathrm{x}$ est parallèle au plan de x_2 et de x_3.

En opérant actuellement par $\square - g_2$, on voit de même que le vecteur x, par l'effet des deux opérations successives, a perdu ses composantes parallèles à x_1 et à x_2, et qu'il est devenu ainsi parallèle à x_3. Donc x_3 est parallèle, ou, ce qui revient ici au même, égal au vecteur $(\square - g_1)(\square - g_2)\mathrm{x}$, ce que l'on peut représenter symboliquement par l'équation

$$\mathrm{x}_3 = \frac{\varphi(\square)}{\square - g_3}\mathrm{x},$$

x étant un vecteur quelconque.

On peut aisément vérifier ce résultat. En effet, si l'on opère par $\square - g_3$, on a, en vertu de l'identité (3),

$$(\square - g_3)\mathrm{x}_3 = (\square - g_1)(\square - g_2)(\square - g_3)\mathrm{x} = \varphi(\square)\mathrm{x} = 0.$$

En déterminant de même les deux autres directions, on aura

$$(8)\qquad \mathrm{x}_1 = \frac{\varphi(\square)}{\square - g_1}\mathrm{x}, \qquad \mathrm{x}_2 = \frac{\varphi(\square)}{\square - g_2}\mathrm{x}, \qquad \mathrm{x}_3 = \frac{\varphi(\square)}{\square - g_3}\mathrm{x},$$

x étant un vecteur arbitraire.

589. Si les racines g_2, g_3 étaient égales entre elles, la troi-

sième équation (6) se confondrait avec la seconde, et l'on n'aurait plus que deux directions x_1, x_2 satisfaisant à la condition (5). Pour représenter un vecteur quelconque x par l'équation (7), on prendrait pour x_3 un vecteur arbitraire, non coplanaire à x_1 et x_2. On aurait alors pour x_1 et x_2 les mêmes valeurs

$$x_1 = \frac{\varphi(\square)}{\square - g_1} x = (\square - g_2)^2 x,$$

$$x_2 = \frac{\varphi(\square)}{\square - g_2} x = (\square - g_1)(\square - g_2) x,$$

qui vérifieraient les deux premières équations (6). Mais, en opérant sur (7) par $(\square - g_1)(\square - g_2)$, il viendrait

$$(\square - g_1)(\square - g_2) x = \alpha_3 (\square - g_1)(\square - g_2) x_3,$$

et le second membre satisfait à l'équation

$$(\square - g_2) x = 0,$$

quel que soit x_3 différent de x.

Si les trois racines sont égales, alors tout vecteur satisfait à la relation $(\square - g_1) x = 0$. Car, en prenant $x_1 = (\square - g_1)^2 x$, l'équation $(\square - g_1) x_1 = 0$ est satisfaite, et x_1 peut représenter un vecteur quelconque.

590. Considérons maintenant le cas où la fonction $\square$ est *conjuguée à elle-même,* c'est-à-dire égale à sa conjuguée $\square'$, de telle sorte que l'on ait (art. 570), quels que soient les vecteurs x et Y,

(9) $$\mathfrak{S}(Y . \square x) = \mathfrak{S}(x . \square Y).$$

Des équations (6) on tire

$$g_2 g_3 . \mathfrak{S}\, x_2 x_3 = \mathfrak{S}(\square x_2 . \square x_3),$$

ou, en vertu de la condition (9), en remplaçant soit Y par $\square x_3$ et x par x_2, soit Y par $\square x_2$ et x par x_3,

$$g_2 g_3 . \mathfrak{S}\, x_2 x_3 = \mathfrak{S}(x_2 . \square^2 x_3) = \mathfrak{S}(x_3 . \square^2 x_2).$$

On a d'ailleurs

$$\square^2 x_2 = \square (g_2 x_2) = g_2 \square x_2 = g_2^2 x_2,$$

et de même $\square^2 x_3 = g_3^2 x_3$. Donc

$$g_2 g_3 . \mathfrak{S} x_2 x_3 = g_3^2 . \mathfrak{S} x_2 x_3 = g_2^2 . \mathfrak{S} x_2 x_3,$$

égalités qui, pour g_2 et g_3 différents entre eux, ne peuvent subsister que si l'on a

$$\mathfrak{S} x_2 x_3 = 0,$$

c'est-à-dire si les deux directions x_2, x_3 sont perpendiculaires entre elles. Donc, si l'équation (3) a ses trois racines inégales, les trois vecteurs déterminés par les formules (8) forment un système orthogonal, lorsque la fonction $\square$ est conjuguée à elle-même.

Si l'équation (3) a deux racines égales, $g_1 = g_2$, x_3 sera perpendiculaire à tous les vecteurs, en nombre infini, qui satisferont à l'équation $(\square - g_1) x = 0$.

591. Ce que nous venons de dire suppose la réalité des trois racines g_1, g_2, g_3. Mais nous allons montrer que ces racines ne peuvent être complexes, lorsque la fonction $\square$ est conjuguée à elle-même. Soit, en effet, s'il est possible, $g_2 + h_2 i$ une de ces racines, i étant l'unité imaginaire de l'algèbre ordinaire, et soit $x_2 + y_2 i$ la valeur correspondante de x, donnée par la seconde équation (8). On devra avoir

$$\square (x_2 + y_2 i) = (g_2 + h_2 i)(x_2 + y_2 i).$$

Opérant successivement par $\mathfrak{S} y_2 \times$, et par $\mathfrak{S} x_2 \times$, et soustrayant les résultats, il vient, eu égard à la propriété (9) de fonction $\square$,

$$0 = h_2 (x_2^2 + y_2^2),$$

et comme x_2 et y_2 sont deux vecteurs réels, cette équation ne peut subsister que si h_2 est nul, ou si la racine g_2 est réelle.

592. Si l'on suppose que les vecteurs orthogonaux x_1, x_2, x_3

soient tous unitaires, et qu'on prenne leurs directions pour celles des trois unités imaginaires $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3$, alors l'identité

$$\mathrm{x}.\mathfrak{S}\,\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3 = \mathrm{x}_1\mathfrak{S}\,\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3\mathrm{x} + \mathrm{x}_2\mathfrak{S}\,\mathrm{x}_3\mathrm{x}_1\mathrm{x} + \mathrm{x}_3\mathfrak{S}\,\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}$$

deviendra

(10) $$\mathrm{x} = -\,\mathrm{I}_1.\mathfrak{S}\,\mathrm{I}_1\mathrm{x} - \mathrm{I}_2.\mathfrak{S}\,\mathrm{I}_2\mathrm{x} - \mathrm{I}_3.\mathfrak{S}\,\mathrm{I}_3\mathrm{x},$$

d'où

(11) $$\square\,\mathrm{x} = -\,g_1\mathrm{I}_1.\mathfrak{S}\,\mathrm{I}_1\mathrm{x} - g_2\mathrm{I}_2.\mathfrak{S}\,\mathrm{I}_2\mathrm{x} - g_3\mathrm{I}_3.\mathfrak{S}\,\mathrm{I}_3\mathrm{x},$$

forme sous laquelle on peut mettre toute fonction conjuguée à elle-même, pourvu que l'on prenne pour $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3$ les racines de l'équation

$$\mathfrak{V}(\mathrm{x}.\square\,\mathrm{x}) = 0.$$

593. On peut tirer de cette forme une transformation très importante d'une fonction conjuguée à elle-même.

La formule (11) renferme seulement trois constantes réelles g_1, g_2, g_3. Voyons si l'on ne peut pas la réduire à la forme

$$\square\,\mathrm{x} = l\mathrm{x} + m.\mathfrak{V}\left[(\mathrm{I}_1 + n\,\mathrm{I}_3)\,\mathrm{x}\,(\mathrm{I}_1 - n\,\mathrm{I}_3)\right],$$

renfermant également trois constantes réelles l, m, n.

En mettant pour x sa valeur (10), développant et égalant de part et d'autre les coefficients de $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3$, dans les deux expressions de $\square\,\mathrm{x}$, il vient

$$\begin{aligned} -g_1 &= -\,l + m(2 - 1 + n^2), \\ -g_2 &= -\,l - m(1 - n^2), \\ -g_3 &= -\,l - m(2n^2 + 1 - n^2), \end{aligned}$$

d'où

$$n^2 = \frac{g_2 - g_3}{g_1 - g_2},$$

d'où une valeur réelle pour n, si g_2 est la racine de grandeur moyenne parmi les trois racines g_1, g_2, g_3. On a ensuite

$$m = -\frac{g_1 - g_2}{2}, \qquad l = \frac{g_1 + g_3}{2}.$$

CHAPITRE VIII.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS DE QUATERNIONS.

---

§ Ier.

Différentiation des fonctions explicites.

594. Si $f(X)$ est une fonction analytique d'une variable complexe ordinaire $X = x_0 + x_1 i$, nous savons que, lorsqu'on fait croître X de la quantité infiniment petite $dX = dx_0 + i dx_1$, $f(X)$ croît d'une quantité qui, aux infiniment petits près du second ordre, est de la forme $dX . f'(X)$, $f'(X)$ désignant une quantité indépendante du rapport $dx_0 : dx_1$ des composantes de dX, et le calcul de cette quantité se fait par les mêmes règles que dans le cas d'une variable réelle. Le multiplicateur $f'(X)$ de dX est la ***dérivée*** de la fonction $f(X)$.

Si $f(X)$ est une fonction non monogène X, c'est-à-dire une quantité variable, dépendant de X d'une manière quelconque, mais dont l'accroissement infiniment petit, ***réduit à sa partie principale,*** ne peut pas se mettre sous la forme $dX . f'(X)$, $f'(X)$ étant indépendant de $dx_0 : dx_1$, cette fonction n'a pas de dérivée.

595. Si maintenant, au lieu d'une quantité complexe ordinaire, X désigne un quaternion, la fonction $f(X)$ pouvant dépendre de paramètres qui seraient eux-mêmes des quaternions, alors la ***partie principale*** de la fonction $f(X)$, correspondante à l'accroissement infiniment petit

$$dX = dx_0 + \iota_1 dx_1 + \iota_2 dx_2 + \iota_3 dx_3$$

de la variable X, ne pourra, en général, se mettre sous la

forme $dX.f'(X)$, à cause de la non-commutativité de la multiplication.

596. C'est ce qu'on peut voir sur un exemple très simple. Soit la fonction

$$f(X) = X^2.$$

Nous aurons

$$f(X + dX) = (X + dX)^2 = X^2 + X.dX + dX.X + dX^2,$$

d'où, en négligeant l'infiniment petit du second ordre dX^2,

$$df(X) = XdX + dX.X.$$

Si l'on voulait mettre cette expression sous la forme $dX.f'(X)$, il faudrait déterminer une quantité W telle que l'on eût

$$X.dX = dX.W,$$

ce qui donnerait

$$W = dX^{-1}.X.dX.$$

Si l'on suppose, par exemple, que X et dX soient des vecteurs, et que l'on désigne par Ξ l'axe unitaire du vecteur infiniment petit dX, on aura, le module de dX disparaissant,

$$W = \Xi^{-1} X \Xi,$$

expression qui, ainsi que nous l'avons vu (art. 552), représente un vecteur faisant avec X un angle double de celui que fait X avec l'axe Ξ, et qui, par suite, n'est pas indépendant du rapport des composantes de dX. Donc la fonction X^2 n'a pas de dérivée, à moins que X et dX ne soient deux quaternions coplanaires, ce qui comprend comme cas particulier le cas de dX réel.

597. Si l'on considère de même la fonction

$$f(X) = \frac{1}{X},$$

on aura

$$f(X+dX)-f(X)=\frac{1}{X+dX}-\frac{1}{X}$$
$$=\frac{1}{X+dX}\left[1-(X+dX).\frac{1}{X}\right]=-\frac{1}{X+dX}.dX.\frac{1}{X}$$
$$=-\left(\frac{1}{X+dX}.X\right).\frac{1}{X}.dX.\frac{1}{X}.$$

Or le facteur

$$\frac{1}{X+dX}.X=\frac{X}{X+dX}=\frac{X+dX-dX}{X+dX}=1-\frac{dX}{X+dX}$$

a pour limite l'unité. Donc on a, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier,

$$d.\frac{1}{X}=-\frac{1}{X}dX\frac{1}{X}.$$

expression qui ne se réduit à $-\frac{dX}{X^2}$ que si X et dX sont coplanaires, ou si dX est réel.

598. Cette absence de dérivée, dans le cas général d'une fonction de quaternions, tient, comme on le voit, à la non-commutativité de la multiplication par la différentielle dX, et elle cesserait si dX était réelle. C'est ce qui aura lieu, en particulier, dans le cas où la variable X, dont dépend le quaternion $f(X)$, sera une variable réelle (1). Alors la différentielle $df(X)$ se ramènera à un seul terme de la forme $dXf'(X)$ ou $f'(X)dX$, et $f(X)$ aura pour dérivée le multiplicateur $f'(X)$.

599. On peut ramener à ce cas la recherche de la différentielle de $f(X)$ dans le cas où X et dX sont des quaternions quelconques. En effet, dans le cas des variables réelles ou complexes ordinaires, si l'on multiplie l'accroissement dX par une variable

(1) Ou, plus généralement, une quantité complexe ordinaire.

réelle infiniment petite ε, indépendante de X, $df(X)$, réduite à sa partie principale, sera la limite pour $\varepsilon = 0$ du rapport

$$\frac{f(X+\varepsilon dX) - f(X)}{\varepsilon},$$

ou, ce qui est la même chose, la limite pour $\varepsilon = 0$ de la dérivée partielle $\frac{\partial f(X+\varepsilon dX)}{\partial \varepsilon}$.

Dans le cas où X et $f(X)$ sont des quaternions, ainsi que dX, la formule précédente ne cessera pas d'être vraie, et l'on pourra prendre pour définition de la différentielle $df(X)$, réduite à sa partie principale, l'expression

$$(1)\quad df(X) = \lim_{\varepsilon=0} \frac{f(X+\varepsilon dX)-f(X)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon=0} \frac{\partial f(X+\varepsilon dX)}{\partial \varepsilon}.$$

Ainsi l'on aura

$$\begin{aligned} d(X^2) &= \lim \frac{(X+\varepsilon dX)^2 - X^2}{\varepsilon} = \lim (X.dX + dX.X + \varepsilon dX^2) \\ &= X.dX + dX.X, \end{aligned}$$

ou encore,

$$\begin{aligned} d(X^2) &= \lim \frac{\partial.(X+\varepsilon dX)^2}{\partial \varepsilon} = \lim (X.dX + dX.X + 2\varepsilon dX^2) \\ &= X.dX + dX.X, \end{aligned}$$

comme nous l'avions déjà trouvé.

600. Si la différentielle dX se compose de plusieurs parties,

$$dX = d_1X + d_2X + \ldots,$$

la différentiation de $df(X)$ sera une opération distributive par rapport à ces parties. En effet, en ne considérant d'abord que deux parties, on a

$$\begin{aligned} \lim \frac{f(X+\varepsilon dX) - f(X)}{\varepsilon} &= \lim \frac{(X+\varepsilon d_1X + \varepsilon d_2X) - f(X)}{\varepsilon} \\ = \lim \frac{f(X+\varepsilon d_1X) - f(X)}{\varepsilon} &+ \lim \frac{f(X+\varepsilon d_1X + \varepsilon d_2X) - f(X+\varepsilon d_1X)}{\varepsilon} \\ = d_1f(X) + \lim d_2f(X+\varepsilon d_1X) &= d_1f(X) + d_2f(X), \end{aligned}$$

en appelant $d_1 f(X)$, $d_2 f(X)$ les accroissements correspondants respectivement à $d_1 X$ et à $d_2 X$. On étendrait facilement le raisonnement au cas d'un nombre quelconque de parties.

De là on déduit, comme cas particulier, cette conséquence, que, si l'on multiplie dX par une constante réelle quelconque k, $df(X)$ se trouvera multiplié par la même constante k.

601. Considérons maintenant une fonction composée

$$Y = f(U, V, W, \ldots),$$

U, V, W, ... étant des fonctions de X. La différentielle

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\varepsilon} [f(U+\varepsilon dU, V+\varepsilon dV, \ldots) - f(U, V, \ldots)]$$

sera une fonction linéaire et homogène des quaternions dU, dV, ..., et distributive par rapport à chacun d'eux.

Ainsi, pour différentier une fonction composée, on différentiera la fonction par rapport à chacune des fonctions composantes, comme si elle était seule variable, et l'on fera la somme des résultats obtenus. La règle est ainsi la même que pour la différentiation des fonctions réelles, aux changements près qu'entraîne la non-commutativité de la multiplication.

602. *Exemples.* I. Soit la fonction

$$Y = (\mathfrak{T}\mathrm{x})^2 = -\mathrm{x}^2,$$

x désignant un vecteur. $\mathfrak{T}\mathrm{x}$ étant une quantité réelle, on aura

$$dY = 2\mathfrak{T}\mathrm{x}.d\mathfrak{T}\mathrm{x}.$$

On a, d'autre part, $d\mathrm{x}$ étant un vecteur,

$$d(\mathrm{x}^2) = \lim \frac{(\mathrm{x}+\varepsilon d\mathrm{x})^2 - \mathrm{x}^2}{\varepsilon} = \mathrm{x}.d\mathrm{x} + d\mathrm{x}.\mathrm{x}$$
$$= \mathrm{x}.d\mathrm{x} + \overline{\mathrm{x}.d\mathrm{x}} = 2.\mathfrak{S}(\mathrm{x}d\mathrm{x}).$$

Donc

$$\mathfrak{T}\mathrm{x}.d\mathfrak{T}\mathrm{x} = -\mathfrak{S}(\mathrm{x}d\mathrm{x}),$$

ou

$$d\mathfrak{T}x = -\mathfrak{S}(\mathfrak{U}x.dx) = \mathfrak{S}\frac{dx}{\mathfrak{U}x},$$

ou encore

$$\frac{d\mathfrak{T}x}{\mathfrak{T}x} = \mathfrak{S}\frac{dx}{x}.$$

603. II. On a, x étant un vecteur quelconque,

$$x = \mathfrak{T}x.\mathfrak{U}x,$$

$\mathfrak{U}x$ étant le verseur ou l'axe unitaire du vecteur. On en tire

$$dx = d\mathfrak{T}.\mathfrak{U}x + \mathfrak{T}x.d\mathfrak{U}x,$$

d'où, en multipliant par $\frac{1}{x} = \frac{1}{\mathfrak{T}x}\cdot\frac{1}{\mathfrak{U}x}$, la multiplication par $\mathfrak{T}x$ étant commutative,

$$\frac{dx}{x} = \frac{d\mathfrak{T}x}{\mathfrak{T}x} + \frac{d\mathfrak{U}x}{\mathfrak{U}x} = \mathfrak{S}\frac{dx}{x} + \frac{d\mathfrak{U}x}{\mathfrak{U}x}.$$

Donc

$$\frac{d\mathfrak{U}x}{\mathfrak{U}x} = \mathfrak{V}\frac{dx}{x} = \mathfrak{V}\frac{x\,dx}{x^2} = \frac{\mathfrak{V}x\,dx}{x^2} = \text{etc.}$$

604. III. Considérons maintenant l'équation

$$(\mathfrak{T}X)^2 = X.\bar{X}.$$

On en tire

$$2\mathfrak{T}X.d\mathfrak{T}X = d(X.\bar{X}) = \lim_{\varepsilon=0}\frac{(X+\varepsilon dX)(\bar{X}+\varepsilon\overline{dX}) - X.\bar{X}}{\varepsilon}$$
$$= \lim\,[dX(\bar{X}+\varepsilon\overline{dX}) + X.\overline{dX}]$$
$$= dX.\bar{X} + X.\overline{dX} = 2\mathfrak{S}(X.\overline{dX}) = 2\mathfrak{S}(\bar{X}.dX).$$

Donc, à cause de $\mathfrak{T}X = \mathfrak{T}\bar{X}$, et de $\mathfrak{U}\bar{X} = \mathfrak{U}\frac{1}{X} = \frac{1}{\mathfrak{U}X} = x^{-\xi}$,

$$\mathfrak{T}X = \mathfrak{S}(\mathfrak{U}\bar{X}.dX) = \mathfrak{S}\left(\mathfrak{U}\frac{1}{X}\cdot dX\right) = \mathfrak{S}(x^{-\xi}.dX).$$

Si $X = \mathrm{x}$ est un vecteur, alors $\overline{X} = \overline{\mathrm{x}} = -\mathrm{x}$, et l'on retrouve la formule de l'exemple I,

$$d\mathfrak{T}\mathrm{x} = -\mathfrak{S}(\mathfrak{U}\mathrm{x}.d\mathrm{x}).$$

On a encore $\mathfrak{U}\frac{1}{X} = \mathrm{x}^{-\xi} = \frac{1}{\mathrm{x}^{\xi}} = \mathfrak{U}\overline{X}$, d'où

$$\frac{d\mathfrak{T}X}{\mathfrak{T}X} = \mathfrak{S}\frac{dX}{X}.$$

D'ailleurs, en faisant $X = \mathfrak{T}X.\mathfrak{U}X$, on a

$$dX = \mathfrak{U}X.d\mathfrak{T}X + \mathfrak{T}X.d\mathfrak{U}X,$$

d'où

$$\frac{dX}{X} = \frac{d\mathfrak{T}X}{\mathfrak{T}X} + \frac{d\mathfrak{U}X}{\mathfrak{U}X},$$

et par suite, en mettant pour $\frac{d\mathfrak{T}X}{\mathfrak{T}X}$ sa valeur $\mathfrak{S}\frac{dX}{X}$,

$$\mathfrak{V}\frac{dX}{X} = \frac{d\mathfrak{U}X}{\mathfrak{U}X}.$$

605. IV. Soit

$$Y = X^2;$$

on a (art. 599)

$$dY = X.dX + dX.X = 2\mathfrak{S}(XdX) + 2\mathfrak{S}X.\mathfrak{V}dX + 2\mathfrak{S}dX.\mathfrak{V}X.$$

Si X est un vecteur x, x_0 et $\mathfrak{S}dX$ sont nuls, et l'on a

$$d(\mathrm{x}^2) = 2\mathfrak{S}(\mathrm{x}d\mathrm{x}).$$

comme dans l'exemple I.

606. V. Soit $Y = \sqrt{X}$. On a $X = Y^2$, d'où

$$dX = Y.dY + dY.Y.$$

En opérant par $Y\times$ et par $\times\overline{Y}$, il vient

$$Y.dX = Y^2.dY + Y.dY.Y,$$
$$dX.\overline{Y} = Y.dY.\overline{Y} + (\mathfrak{T}Y)^2.dY,$$

et, en ajoutant,

$$Y.dX + dX.Y = [Y^2 + (\mathfrak{T}Y)^2 + 2\mathfrak{S}Y.Y]dY,$$

ce qui donne la valeur de

$$dY = d\sqrt{X}.$$

607. On a

$$X.X^{-1} = 1, \quad \text{d'où} \quad X.d(X^{-1}) + dX.X^{-1} = 0,$$

et par suite, en opérant par $X^{-1}\times$, on trouve (art. 597)

$$d\frac{1}{X} = -\frac{1}{X}.dX.\frac{1}{X}.$$

Si $X = \mathbf{x}$ est un vecteur, alors

$$d\frac{1}{\mathbf{x}} = -\frac{1}{\mathbf{x}}.d\mathbf{x}.\frac{1}{\mathbf{x}} = \frac{1}{\mathbf{x}^2}d\mathbf{x} - \frac{1}{\mathbf{x}}\frac{1}{\mathbf{x}}d\mathbf{x} - \frac{1}{\mathbf{x}}.d\mathbf{x}.\frac{1}{\mathbf{x}}$$
$$= \frac{d\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2} - \frac{1}{\mathbf{x}}\left(\frac{1}{\mathbf{x}}.d\mathbf{x} + d\mathbf{x}.\frac{1}{\mathbf{x}}\right) = \frac{d\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2} - \frac{1}{\mathbf{x}}\left(\frac{d\mathbf{x}}{\mathbf{x}} + \mathfrak{C}\frac{d\mathbf{x}}{\mathbf{x}}\right)$$
$$= \frac{d\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2} - \frac{2}{\mathbf{x}}.\mathfrak{S}\frac{d\mathbf{x}}{\mathbf{x}} = \frac{1}{\mathbf{x}}\left(\frac{d\mathbf{x}}{\mathbf{x}} - 2\mathfrak{S}\frac{d\mathbf{x}}{\mathbf{x}}\right) = -\frac{1}{\mathbf{x}}\mathfrak{C}\frac{d\mathbf{x}}{\mathbf{x}}.$$

608. VII. De $X = x_0 + x_1$ on tire

$$dX = dx_0 + dx_1.$$

Donc

$$\mathfrak{S}dX = dx_0 = d\mathfrak{S}X, \quad \mathfrak{V}dX = dx_1 = d\mathfrak{V}X,$$

de sorte que le signe d est commutatif avec les signes $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{V}$.

Puisque $\overline{X} = x_0 - x_1$, on aura donc

$$d\overline{X} = d\mathfrak{C}X = dx_0 - dx_1 = \mathfrak{S}dX - \mathfrak{V}dX = \mathfrak{C}dX.$$

Les signes d et $\mathfrak{C}$ sont donc aussi commutatifs

609. La différentiation successive ne présente aucune nouvelle difficulté. Ainsi, en différentiant de nouveau l'expression

$$d(X^2) = X.dX + dX.X,$$

on trouve

$$d^2(X^2) = X.d^2X + 2(dX)^2 + d^2X.X,$$

et de même pour les différentielles des ordres suivants.

Si X est un vecteur x, on a (art. 602)

$$d(\mathrm{x}^2) = 2\mathfrak{S}(\mathrm{x}\,d\mathrm{x}),$$

d'où

$$d^2(\mathrm{x}^2) = 2(d\mathrm{x})^2 + 2\mathfrak{S}(\mathrm{x}d^2\mathrm{x}).$$

De même, X étant le verseur ou l'axe unitaire de x, on a (art. 603)

$$d^2\mathfrak{U}\mathrm{x} = d^2X = -d\frac{X:\mathfrak{V}(\mathrm{x}d\mathrm{x})}{(\mathfrak{T}\mathrm{x})^2}.$$

Or (art. 604)

$$d\frac{1}{(\mathfrak{T}\mathrm{x})^2} = -\frac{2d\mathfrak{T}\mathrm{x}}{(\mathfrak{T}\mathrm{x})^3} = \frac{2\mathfrak{S}(\mathrm{x}d\mathrm{x})}{(\mathfrak{T}\mathrm{x})^4},$$

$$d.\mathfrak{V}(\mathrm{x}d\mathrm{x}) = \mathfrak{V}.d(\mathrm{x}d\mathrm{x}) = \mathfrak{V}(d\mathrm{x}^2 + \mathrm{x}.d^2\mathrm{x}) = \mathfrak{V}(\mathrm{x}.d^2\mathrm{x}).$$

Donc

$$-d^2\mathfrak{U}\mathrm{x} = \frac{2\mathfrak{S}(\mathrm{x}d\mathrm{x})}{(\mathfrak{T}\mathrm{x})^4}.X.\mathfrak{V}(\mathrm{x}d\mathrm{x}) + \frac{1}{(\mathfrak{T}\mathrm{x})^2}\cdot\frac{X}{(\mathfrak{T}\mathrm{x})^2}(\mathfrak{V}.\mathrm{x}d\mathrm{x})^2 + \frac{X}{(\mathfrak{T}\mathrm{x})^2}\mathfrak{V}(\mathrm{x}d^2\mathrm{x})$$

$$= \frac{\mathfrak{U}\mathrm{x}}{(\mathfrak{T}\mathrm{x})^4}[(\mathfrak{V}.\mathrm{x}d\mathrm{x})^2 + 2\mathfrak{S}(\mathrm{x}d\mathrm{x}).\mathfrak{V}(\mathrm{x}d\mathrm{x}) - \mathrm{x}^2.\mathfrak{V}(\mathrm{x}d^2\mathrm{x})].$$

610. Donnons ici la définition de l'opérateur que Hamilton a désigné par le symbole

$$\nabla = \mathrm{i}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathrm{i}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathrm{i}_3\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Soit F (x) une fonction *réelle* du vecteur

$$\mathrm{x} = \mathrm{i}_1x_1 + \mathrm{i}_2x_2 + \mathrm{i}_3x_3,$$

et par suite une fonction réelle des composantes x_1, x_2, x_3. On aura, d'après cela

$$\nabla\,\mathrm{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{i}_1\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial x_1} + \mathrm{i}_2\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial x_2} + \mathrm{i}_3\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial x_3}.$$

Or on a

$$d\mathbf{x} = \mathbf{i}_1 dx_1 + \mathbf{i}_2 dx_2 + \mathbf{i}_3 dx_3,$$

d'où, dF (x) devant être une quantité réelle, comme F (x),

$$\begin{aligned} dF(\mathbf{x}) &= \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3} dx_3 \\ &= -\mathfrak{S}\left[\left(\mathbf{i}_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial F}{\partial x_3}\right)(\mathbf{i}_1 dx_1 + \mathbf{i}_2 dx_2 + \mathbf{i}_3 dx_3)\right] \\ &= -\mathfrak{S}(\nabla F(\mathbf{x}) . d\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Si l'on considère la surface représentée par l'équation

$$F(\mathbf{x}) = C,$$

C étant une constante, on aura alors $dF(\mathbf{x}) = 0$, et par suite

$$\mathfrak{S}[\nabla F(\mathbf{x}) . d\mathbf{x}] = 0.$$

L'expression $\nabla F(\mathbf{x})$ représente évidemment un vecteur, que nous désignerons par $\mathbf{N}$, et qui est perpendiculaire au vecteur $d\mathbf{x}$, et par suite normal à la surface $F(\mathbf{x}) = C$.

§ II.

Différentiation des fonctions implicites.

611. Soit Y une fonction implicite du quaternion X, donnée par l'équation non résolue

$$F(X, Y) = 0.$$

On se propose de trouver la différentielle dY en fonction de X, Y, dX.

Pour cela, on différentiera $F(X, Y)$ par la règle de la différentiation des fonctions composées. La différentielle $dF(X, Y)$ sera une fonction linéaire et homogène des différentielles dX et dY, et par suite $dF = 0$ sera une équation du premier degré en dY, que l'on résoudra par les méthodes exposées dans le Chapitre précédent.

Supposons que l'on demande, par exemple, de trouver la différentielle de $Y = \sqrt[3]{X}$. Cette quantité est déterminée par l'équation

$$Y^3 = X,$$

qui donne, en différentiant,

$$Y^2.dY + Y.dY.Y + dY.Y^2 = dX.$$

Opérons à la fois par $Y \times$ et par $\times Y^{-1}$, ce qui donne

$$Y^3.dY.Y^{-1} + Y^2.dY + Y.dY.Y = Y.dX.Y^{-1},$$

et retranchons cette équation de la précédente; il viendra

$$dY.Y^2 - Y^3.dY.Y^{-1} = dX - Y.dX.Y^{-1},$$

équation en dY, de même forme que celle que nous avons traitée dans l'art. 561.

On pourrait obtenir de la même manière la différentielle d'une racine de degré quelconque d'un quaternion.

CHAPITRE IX.

APPLICATION DU CALCUL DES QUATERNIONS A LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE

---

§ Ier.

Démonstration des formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique.

612. Soient ABC un triangle sphérique, A'B'C' son triangle polaire, ayant pour sommets les pôles *(positifs)* des côtés BC, CA, AB. Réciproquement, ABC sera le triangle polaire de A'B'C'. Chaque côté de l'un de ces triangles sera égal à l'angle ***extérieur*** correspondant de l'autre triangle, ces angles ***extérieurs*** étant les suppléments des angles intérieurs adjacents, et étant formés par les prolongements des côtés ***dans le sens direct.***

Les côtés BC, CA, AB, considérés en grandeur et en direction, représentent des biradiales unitaires A, B, C, formées par les vecteurs OA$=$A, OB$=$B, OC$=$C, pris deux à deux, et ayant pour axes les vecteurs A', B', C' des sommets du triangle polaire, et pour arguments les grandeurs α, β, γ de ces mêmes côtés, ou les angles extérieurs du triangle polaire A'B'C', de sorte que ces biradiales pourront être désignées (art. 526) par

$$A'^{\alpha},\quad B'^{\beta},\quad C'^{\gamma}.$$

De même, les côtés B'C', C'A', A'B' du triangle polaire seront des biradiales A', B', C', ayant pour axes A, B, C, et pour argu-

ments les grandeurs α', β', γ' des côtés de A'B'C' ou des angles extérieurs de ABC, et l'on pourra les désigner par

$$\text{A}^{\alpha'}; \quad \text{B}^{\beta'}, \quad \text{C}^{\gamma'}.$$

613. La biradiale A'^{α} étant formée par les vecteurs B et C, a pour valeur $\frac{\text{C}}{\text{B}} = -\text{BC}$, et de même pour les autres, ce qui donne les équations

$$(1) \quad \begin{cases} A = \cos\alpha + \text{A}'\sin\alpha = -\text{BC}, \\ B = \cos\beta + \text{B}'\sin\beta = -\text{CA}, \\ C = \cos\gamma + \text{C}'\sin\gamma = -\text{AB}; \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} A' = \cos\alpha' + \text{A}\sin\alpha' = -\text{B}'\text{C}', \\ B' = \cos\beta' + \text{B}\sin\beta' = -\text{C}'\text{A}', \\ C' = \cos\gamma' + \text{C}\sin\gamma' = -\text{A}'\text{B}'. \end{cases}$$

En opérant sur l'équation $A = -\text{BC}$ soit par $\text{B}\times$, soit par $\times\text{C}$, on en tire les deux relations

$$\text{B}A = \text{C}, \quad A\text{C} = \text{B}.$$

En y permutant circulairement les lettres, et formant les relations analogues pour le triangle polaire, on aura les formules

$$(3) \quad \begin{cases} \text{A} = \text{C}B = C\text{B}, \\ \text{B} = \text{A}C = A\text{C}, \\ \text{C} = \text{B}A = B\text{A}; \end{cases} \qquad (4) \quad \begin{cases} \text{A}' = \text{C}'B' = C'\text{B}', \\ \text{B}' = \text{A}'C' = A'\text{C}', \\ \text{C}' = \text{B}'A' = B'\text{A}. \end{cases}$$

Substituant pour $A, B, \ldots$ leurs valeurs

$$\text{A}'^{\alpha} = \cos\alpha + \text{A}'\sin\alpha, \text{ etc.},$$

ces formules deviennent

$$(5) \quad \begin{cases} \text{A} = \text{C}\cos\beta + \text{CB}'\sin\beta = \text{B}\cos\gamma + \text{C}'\text{B}\sin\gamma, \\ \text{B} = \text{A}\cos\gamma + \text{AC}'\sin\gamma = \text{C}\cos\alpha + \text{A}'\text{C}\sin\alpha, \\ \text{C} = \text{B}\cos\alpha + \text{BA}'\sin\alpha = \text{A}\cos\beta + \text{B}'\text{A}\sin\beta; \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} \text{A}' = \text{C}'\cos\beta' + \text{C}'\text{B}\sin\beta' = \text{B}'\cos\gamma' + \text{CB}'\sin\gamma', \\ \text{B}' = \text{A}'\cos\gamma' + \text{A}'\text{C}\sin\gamma' = \text{C}'\cos\alpha' + \text{AC}'\sin\alpha', \\ \text{C}' = \text{B}'\cos\alpha' + \text{B}'\text{A}\sin\alpha' = \text{A}'\cos\beta' + \text{BA}'\sin\beta'. \end{cases}$$

614. Multiplions entre elles les deux dernières équations (1): nous aurons (*voir* art. 540)

$$\text{CA}^2\text{B} = -\text{CB} = -\mathfrak{C}\,\text{BC} = \bar{A} = \cos\alpha - \text{A}'\sin\alpha = BC.$$

Opérant par $\mathfrak{S}$ sur cette égalité, il vient

$$A_0 = \mathfrak{S}\,BC = B_0C_0 + \mathfrak{S}\,B_iC_i,$$

c'est-à-dire, à cause de $\mathfrak{S}\,\text{B}'\text{C}' = -\mathfrak{S}\,A' = -\cos\alpha'$.

$$(7)\qquad \cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha',$$

première formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique.

Si l'on opère maintenant par $\mathfrak{D}$, on aura

$$-A_i = \mathfrak{D}\,BC = B_0C_i + C_0B_i + \mathfrak{D}\,B_iC_i,$$

ou, à cause de $\mathfrak{D}\,\text{B}'\text{C}' = -\mathfrak{D}\,A' = -\text{A}\sin\alpha'$,

$$(8)\quad -\text{A}'\sin\alpha = \text{C}'\cos\beta\sin\gamma + \text{B}'\sin\beta\cos\gamma - \text{A}\sin\beta\sin\gamma\sin\alpha'.$$

En opérant sur l'équation (8) tour à tour par $\mathfrak{S}\,\text{B}'\times$ et par $\mathfrak{D}\,\text{B}'\times$, on trouve, à cause de $\text{B}'\text{A}' = -\bar{C}'$, de $\text{B}'\text{C}' = -A'$, et de la dernière équation (5),

$$C_0'\sin\alpha = -A_0'\cos\beta\sin\gamma - \sin\beta\cos\gamma,$$
$$-C_i'\sin\alpha = -A_i'\cos\beta\sin\gamma + (\text{C} - \text{A}\cos\beta)\sin\gamma\sin\alpha',$$

c'est-à-dire, en effaçant dans la dernière les termes qui se détruisent, et divisant par C,

$$(9)\qquad \sin\alpha\cos\gamma' = -\sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma\sin\alpha',$$

$$(10)\qquad \sin\alpha\sin\gamma' = \sin\gamma\sin\alpha'.$$

L'équation (10) est la deuxième formule fondamentale.

Des formules (9) et (10) on tire, en éliminant par division $\sin\alpha$,

$$(11)\qquad \sin\alpha'\cot\gamma' + \sin\beta\cot\gamma + \cos\beta\cos\alpha' \doteq 0,$$

troisième formule fondamentale.

Des formules (7), (10) et (11) on en déduit d'autres par la permutation circulaire des lettres et par l'échange mutuel des lettres accentuées avec les lettres sans accent.

615. Les trois biradiales A, B, C formant un angle trièdre fermé, on a (art. 540)

$$ABC = 1, \qquad \text{d'où} \qquad A = \bar{C}\bar{B},$$

équation qui fait connaître directement une de ces biradiales, quand on connaît les deux autres.

Soient donnés, par exemple, les deux biradiales

$$B = \frac{1}{\sqrt{14}}(3 + 2\iota_1 - \iota_2), \qquad C = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 + \iota_1 - \iota_3),$$

d'où

$$\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{14}}, \quad \sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}, \quad \cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{6}}, \quad \sin\gamma = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}},$$

les vecteurs unitaires B', C' ayant pour expressions

$$\mathrm{B}' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\iota_1 - \iota_2), \qquad \mathrm{C}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\iota_1 - \iota_3).$$

On a, en effectuant la multiplication,

$$A = \frac{2 - \iota_1 + \iota_3}{\sqrt{6}} \cdot \frac{3 - 2\iota_1 + \iota_2}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{21}}(2 - 3\iota_1 + 2\iota_2 + 2\iota_3),$$

d'où

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}, \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{21}}, \quad \mathrm{A}' = \frac{1}{\sqrt{17}}(-3\iota_1 + 2\iota_2 + 2\iota_3).$$

On trouve ensuite

$$1^\circ \qquad A' = -\mathrm{B}'\mathrm{C}' = \frac{1}{\sqrt{10}}(2 + \iota_1 + 2\iota_2 + \iota_3),$$

d'où

$$\cos\alpha' = \frac{2}{\sqrt{10}}, \quad \sin\alpha' = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}, \quad \text{A} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\text{I}_1 + 2\text{I}_2 + \text{I}_3);$$

2° $$B' = -\text{C}'\text{A}' = \frac{1}{\sqrt{34}}(-5 + 2\text{I}_1 + \text{I}_2 + 2\text{I}_3),$$

d'où

$$\cos\beta' = \frac{-5}{\sqrt{34}}, \quad \sin\beta' = \frac{3}{\sqrt{34}}, \quad \text{B} = \tfrac{1}{3}(2\text{I}_1 + \text{I}_2 + 2\text{I}_3);$$

3° $$C' = -\text{A}'\text{B}' = \frac{1}{\sqrt{85}}(-8 + 2\text{I}_1 + 4\text{I}_2 - \text{I}_3),$$

d'où

$$\cos\gamma' = \frac{-8}{\sqrt{85}}, \quad \sin\gamma' = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{85}}, \quad \text{C} = \frac{1}{\sqrt{21}}(2\text{I}_1 + 4\text{I}_2 - \text{I}_3).$$

Ainsi, connaissant les deux côtés AB, AC du triangle ABC de grandeur et de position, nous en avons déduit tous les éléments du triangle et de son triangle polaire, et les vecteurs qui fixent la position des sommets de ces deux triangles par rapport aux axes $O\text{I}_1$, $O\text{I}_2$, $O\text{I}_3$.

616. *Autre exemple.* On donne les trois côtés

$$\alpha = 1^q{,}26, \quad \beta = 1^q{,}39, \quad \gamma = 1^q{,}17,$$

et l'on propose de résoudre le triangle. Fixons les positions arbitraires des trois axes rectangulaires $O\text{I}_1$, $O\text{I}_2$, $O\text{I}_3$, de manière que l'axe $O\text{I}_1$ passe par le sommet B, d'où

$$\text{B} = \text{I}_1,$$

et que l'axe $O\text{I}_3$ soit perpendiculaire au plan BOC de la biradiale A d'argument α, ce qui donne

$$\text{A}' = \text{I}_3.$$

On aura donc, en multipliant, pour simplifier l'écriture, tous lés nombres par 1000, et bornant les calculs à 3 figures,

à l'aide de la Table de multiplication de Crelle,

$$A = -397 + 918\,\mathrm{I}_3,$$
$$B = -575 + 818\,\mathrm{B}',$$
$$C = -254 + 962\,\mathrm{C}'.$$

On a, par les formules (3) et (4),

$$\mathrm{C} = \mathrm{B}A = \mathrm{I}_1(\cos\alpha + \mathrm{I}_3\sin\alpha) = -397\,\mathrm{I}_1 + 918\,\mathrm{I}_2,$$
$$\mathrm{C}' = B'\mathrm{A}' = (\cos\beta' + \mathrm{I}_1\sin\beta')\mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_2\sin\beta' + \mathrm{I}_3\cos\beta',$$
$$\mathrm{A} = C\mathrm{B} = (-264 + 962\,\mathrm{C}')\mathrm{I}_1$$
$$= -264\,\mathrm{I}_1 + 962(-\mathrm{I}_2\cos\beta' + \mathrm{I}_3\sin\beta'),$$
$$\mathrm{B}' = \mathrm{A}'C' = \mathrm{I}_3(\cos\gamma' + \mathrm{C}\sin\gamma')$$
$$= 918\,\mathrm{I}_1\sin\gamma' + 397\,\mathrm{I}_2\sin\gamma' + \mathrm{I}_3\cos\gamma',$$
$$\mathrm{A} = \mathrm{C}B = (-397\,\mathrm{I}_1 + 918\,\mathrm{I}_2)(-575 + 818\,\mathrm{B}')$$
$$= (228 - 751\cos\gamma)\mathrm{I}_1 - (528 + 325\cos\gamma')\mathrm{I}_2 - 818\sin\gamma'.\mathrm{I}_3.$$

Identifiant entre elles les deux expressions de A, on a les équations

$$-264 = 228 - 751\cos\gamma',$$
$$-962\cos\beta' = -528 - 325\cos\gamma',$$
$$962\sin\beta' = 818\sin\gamma',$$

d'où l'on tire

$$\cos\gamma' = 0{,}655, \quad \gamma' = 0^q{,}545,$$
$$\operatorname{tang}\beta' = 0{,}834, \quad \beta' = 0^q{,}442.$$

Enfin, on a

$$A' = -\mathrm{B}'\mathrm{C}' = -\mathrm{A}'C'.\mathrm{C}' = -\mathrm{I}_3(\cos\gamma' + \mathrm{C}\sin\gamma')\mathrm{C}'$$
$$= -(693\,\mathrm{I}_1 + 300\,\mathrm{I}_2 + 655\,\mathrm{I}_3)(640\,\mathrm{I}_2 + 769\,\mathrm{I}_3)$$
$$= 696 - 188\,\mathrm{I}_1 - 532\,\mathrm{I}_2 + 444\,\mathrm{I}_3,$$

d'où

$$\cos\alpha' = 0{,}696, \quad \sin\alpha' = 0{,}718, \quad \alpha' = 0^q{,}510.$$

En appliquant les mêmes calculs à un triangle quelconque, donné par ses trois côtés α, β, γ, on retrouverait les formules générales que nous avons obtenues d'une manière un peu différente dans l'art. 614.

§ II.

Questions diverses relatives aux triangles sphériques.

617. Nous avons vu (art. 507) que les produits

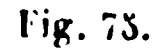
(1) $$AB = C, \qquad BA = D,$$

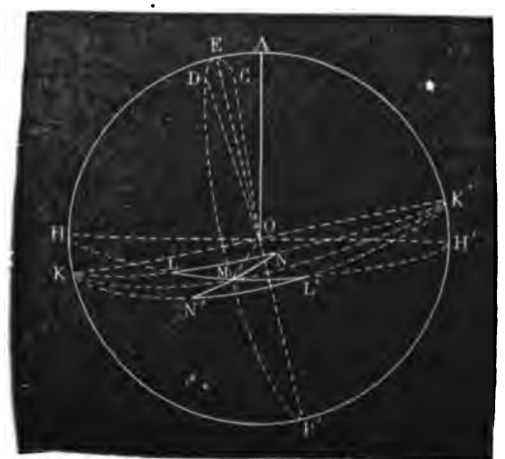
que l'on peut former avec deux biradiales données LOM $= A$ $=$ MOL', MON $= B =$ N'OM (*fig.* 75), en changeant l'ordre des facteurs, sont deux biradiales LON, N'OL', de même module $\mathfrak{T}A \,.\, \mathfrak{T}B$, et d'arguments égaux en grandeur, mais non en position, puisque leurs plans sont différents. Les plans de ces biradiales forment des angles égaux avec ceux des biradiales données,

$$\text{MLN} = \text{ML'N'}, \qquad \text{MNL} = \text{MN'L'},$$

et par suite les vecteurs C_ι, D_ι font des angles égaux tant avec le vecteur A_ι qu'avec le vecteur B_ι.

De plus, le vecteur OM, intersection des plans de A et de B, est perpendiculaire aux deux axes A_ι, B_ι, et intermédiaire entre les axes C_ι, D_ι des biradiales LON $= C$, L'ON' $= D$, et il formera avec ces derniers axes des angles égaux.


Fig. 75.



Si donc on mène par OM un plan Π perpendiculaire à l'intersection KK' des plans LON, N'OL', et par suite aussi au plan bissecteur KMK', ce plan Π contiendra les axes OC, OD, OE de ces trois plans, et l'axe OE sera bissecteur de l'angle des deux autres.

618. Ce théorème peut se démontrer par le calcul. Supposons, pour plus de simplicité, les modules réduits à l'unité, et soit

$$\text{AB} = \cos\mu + \text{M}\sin\mu$$

le produit des axes A, B des biradiales unitaires A et B, l'axe M étant perpendiculaire à chacun des axes A et B.

En intervertissant l'ordre des facteurs, on aura (art. 510)

$$\text{BA} = \overline{\text{AB}} = \cos\mu - \text{M}\sin\mu.$$

Or on a

$$\begin{aligned} AB &= (\cos\alpha + \text{A}\sin\alpha)(\cos\beta + \text{B}\sin\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta + \text{A}\sin\alpha\cos\beta + \text{B}\cos\alpha\sin\beta + \text{AB}\sin\alpha\sin\beta, \\ BA &= \cos\alpha\cos\beta + \text{A}\sin\alpha\cos\beta + \text{B}\cos\alpha\sin\beta + \text{BA}\sin\alpha\sin\beta. \end{aligned}$$

En mettant pour AB sa valeur, il vient

$$\begin{aligned} AB = C = \cos\alpha\cos\beta + \text{A}\sin\alpha\cos\beta + \text{B}\cos\alpha\sin\text{B} \\ + \sin\alpha\sin\beta\cos\mu + \text{M}\sin\alpha\sin\beta\sin\mu. \end{aligned}$$

Le produit $BA = D$ ne diffèrera de C que par le changement de signe du terme multiplié par M. On a donc, en faisant

$$C = \cos\gamma + \text{C}\sin\gamma, \qquad D = \cos\delta + \text{D}\sin\delta,$$

$$(2) \qquad \cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\mu = \cos\delta,$$

d'où $\gamma = \delta$, c'est-à-dire arc LM = arc N′L′.

On trouve ensuite

$$(3) \qquad \begin{cases} \text{C}\sin\gamma = \text{A}\sin\alpha\cos\beta + \text{B}\cos\alpha\sin\beta + \text{M}\sin\alpha\sin\beta\sin\mu, \\ \text{D}\sin\delta = \text{A}\sin\alpha\cos\beta + \text{B}\cos\alpha\sin\beta - \text{M}\sin\alpha\sin\beta\sin\mu. \end{cases}$$

Divisant les deux seconds membres par A, les parties réelles seront, de part et d'autre,

$$\sin\alpha\cos\beta + \mathfrak{S}\frac{\text{B}}{\text{A}}\cos\alpha\sin\beta,$$

puisque $\frac{\text{M}}{\text{A}}$ est une biradiale rectangle, dont la partie réelle est

nulle. Donc, à cause de $\gamma = \delta$, les cosinus des arguments des biradiales $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}, \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{A}}$ sont égaux.

En divisant par M, on voit de même que les deux biradiales $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{M}}, -\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{M}}$ ont la même partie réelle $\frac{\sin\alpha \sin\beta \sin\mu}{\sin\gamma}$, et ne diffèrent que par le signe de leurs vecteurs. Donc

$$-\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{M}} = \mathfrak{C}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{M}}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad -\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{C}}.$$

619. Si l'une A des deux biradiales A, B est rectangle et se réduit à son vecteur A, nous aurons ce corollaire :

Soit LM = LM′ = un quadrant; L et L′ se confondront avec les extrémités H, H′ du diamètre perpendiculaire à OM, et, par suite, l'intersection des plans OLN, OL′N′ se confondra avec $\mathrm{HH_1}$. Le plan bissecteur $\mathrm{KMK_1}$ deviendra le plan HLML′H′; son pôle E viendra en A, pôle de HMH′. Donc, si l'on considère les produits

$$\mathrm{A}.\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}, \quad \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}.\mathrm{A}$$

d'une biradiale et d'un vecteur, où les facteurs sont pris dans un ordre différent, le vecteur A sera la bissectrice de l'angle des axes des deux biradiales HON, N′OH′. On en conclut que les axes des biradiales

$$\mathrm{A}B = C, \qquad B\mathrm{A} = D \tag{4}$$

forment avec A des angles égaux de grandeur et de position.

En employant la transformation de l'art. 539, la seconde équation (4) donne

$$D\mathrm{A} = -B, \quad \mathrm{A} = -\bar{D}B, \quad \mathrm{A}\bar{B} = -\bar{D}.$$

Or il est clair que l'axe de la biradiale D est le même que l'axe de sa conjuguée prise négativement $-\bar{D}$. Donc les axes des biradiales $\mathrm{A}B$ et $\mathrm{A}\bar{B}$ font des angles égaux avec le vecteur A.

C'est ce qui résulte encore des calculs de l'art. 618. En faisant, dans (2) et (3), $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\frac{\text{C}\sin\gamma}{\text{A}} = \cos\beta + \frac{\text{M}}{\text{A}}\sin\beta\sin\mu, \qquad \frac{\text{D}\sin\gamma}{\text{A}} = \cos\beta - \frac{\text{M}}{\text{A}}\sin\beta\sin\mu,$$

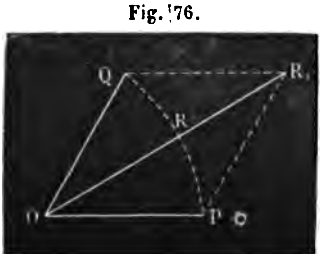
de sorte que $\frac{\text{C}}{\text{A}}$ et $\frac{\text{D}}{\text{A}}$ sont deux biradiales conjuguées. Donc

$$\frac{\text{C}}{\text{A}} = \frac{\text{A}}{\text{D}},$$

le vecteur D étant l'axe de $-\overline{D}$.

620. Soient OP, OQ deux vecteurs unitaires, et $OR_1 = OP + OQ$ leur somme. Si l'on prend $\mathfrak{T}OR = \mathfrak{T}OP = \mathfrak{T}OQ = 1$, on aura

Fig. 176.



$$OR = \frac{OR_1}{\mathfrak{T}OR_1} = \frac{OP + OQ}{\mathfrak{T}(OP + OQ)}$$

pour le vecteur unitaire bissecteur de la biradiale.

D'après cela, si ABC est un triangle sphérique, les milieux L, M, N des côtés BC, CA, AB seront donnés par les formules

$$\text{L} = \frac{\text{B}+\text{C}}{\mathfrak{T}(\text{B}+\text{C})}, \quad \text{M} = \frac{\text{C}+\text{A}}{\mathfrak{T}(\text{C}+\text{A})}, \quad \text{N} = \frac{\text{A}+\text{B}}{\mathfrak{T}(\text{A}+\text{B})}.$$

L'égalité des biradiales BOL, LOC donne

$$\frac{\text{C}}{\text{L}} = \frac{\text{L}}{\text{B}},$$

et de même

$$\frac{\text{A}}{\text{M}} = \frac{\text{M}}{\text{C}}, \quad \frac{\text{B}}{\text{N}} = \frac{\text{N}}{\text{A}}.$$

Les biradiales BOL, LOC ayant pour angle commun $\frac{\alpha}{2}$ et pour axe commun A′, on aura donc

$$\frac{\text{C}}{\text{L}} = \frac{\text{L}}{\text{B}} = \cos\frac{\alpha}{2} + \text{A}'\sin\frac{\alpha}{2},$$

avec deux autres formules semblables.

621. Réciproquement, proposons-nous, étant donnés les milieux L, M, N des côtés d'un triangle sphérique, de déterminer le triangle.

Les axes des biradiales exprimées par les produits $L.\frac{M}{N}$ et $\frac{N}{M}.L$ forment un angle qui a pour bissectrice le vecteur OL. De même, les axes des biradiales $M.\frac{L}{N}$ et $\frac{L}{N}.M$ ont pour bissectrice OM, et les axes des biradiales $N.\frac{M}{L}$ et $\frac{M}{L}.N$ ont pour bissectrice ON.

Or, en remarquant que $L.\frac{M}{N}$ et $\frac{N}{M}.L$ ont des arguments de même grandeur, ainsi que $\frac{M}{L}.N = L.\frac{N}{M}$ et $N.\frac{M}{L}$, et désignant par φ la grandeur de cet argument commun, et par B, C, A les axes des diverses biradiales, on a

$$L.\frac{N}{M} = -LMN = \frac{M}{L}.N = \cos\varphi + B\sin\varphi,$$

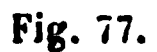
$$M.\frac{L}{N} = -MNL = \frac{N}{M}.L = \cos\varphi + C\sin\varphi,$$

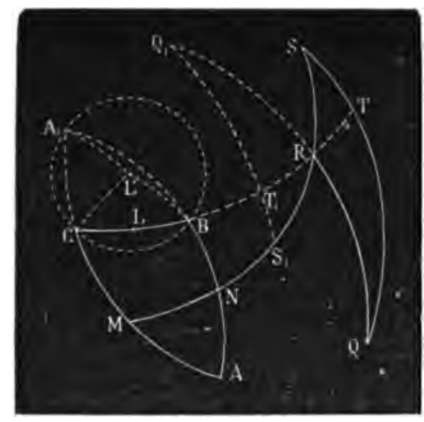
$$N.\frac{M}{L} = -NLM = \frac{L}{N}.M = \cos\varphi + A\sin\varphi.$$

Il résulte, de ces égalités et de ce que nous avons rappelé tout à l'heure, que L, M, N sont respectivement les milieux des arcs BC, CA, AB, et, par suite, ABC est le triangle cherché, et le problème est analytiquement résolu.

Pour construire ces formules, soit R (*fig.* 77), l'intersection du cercle MN avec le grand cercle dont le pôle est en L, et soit $RQ = \frac{\pi}{2}$. Prenons, sur le prolongement de MN, RS = MN; alors $QOS = L.\frac{N}{M} = \cos\varphi + B\sin\varphi$, B étant l'axe du plan OQS. Or, $LQ = \frac{\pi}{2} = LR$; donc Q est le pôle de LR, et par suite OQS est perpendiculaire à OLRT. On obtient donc B en prenant $TB = \frac{\pi}{2}$.

On obtiendra de même A et C. Ainsi, on aura C, pôle de $\frac{\text{N}}{\text{M}}\text{L}$, en prenant $S_1R = MN$, $RQ_1 = \frac{\pi}{2}$, et portant $T_1C = \frac{\pi}{2}$ à partir de la rencontre de S_1Q_1 avec LR. Cela revient (art. 617) à faire $LC = BL$.


Fig. 77.



622. Soit L' le pôle de MN. Les angles QBR, SBL' seront droits, B et L' étant les pôles de QS et de MNRS, et par suite S le pôle de L'B. Donc

$$\begin{aligned} QS = \varphi = QBS &= QBS + SBL' - QBR \\ &= QBL' - QBR = RBL' = \pi - L'BC. \end{aligned}$$

Les arcs CA, AB étant partagés en leurs milieux par l'arc MN, de pôle L', A, B, C seront équidistants du plan OMN. Donc, si A_1 est le point diamétralement opposé à A, le petit cercle A_1BC aura son plan parallèle à MNR, et par suite aura même pôle L' que MNR. Donc les triangles L'BC, $L'CA_1$, $L'A_1B$ seront isoscèles. Or on a

$$\begin{aligned} \pi &= ABC + CBL' + L'BA_1, \\ \pi &= BCA + BCL' + L'CA_1, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 2\pi &= ABC + BCA + 2CBL' + CA_1B, \\ BAC + CBA + ACB &= 2\pi - 2CBL' = 2\varphi. \end{aligned}$$

Donc l'angle φ, qui est l'argument du produit $-\text{LMN}$ des trois rayons bissecteurs des côtés du triangle sphérique ABC, est égal à la demi-somme des angles du triangle, de sorte que $\varphi - \frac{\pi}{2}$ représente le demi-excès sphérique.

On pourrait prendre aussi pour φ' l'argument de l'un des deux autres produits $-\mathrm{MNL}$, $-\mathrm{NLM}$.

623. L'égalité

$$-\mathrm{LMN} = \cos\varphi + \mathrm{B}\sin\varphi = \mathrm{B}^{\frac{2}{\pi}\varphi},$$

multipliée par $\frac{1}{\mathrm{B}}$, donne

$$\mathrm{BLMN} = \mathrm{B}^{\frac{2}{\pi}\varphi-1} = \cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{B}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right).$$

Or $\varphi - \frac{\pi}{2}$ est le demi-excès sphérique, ou la moitié de l'aire du triangle ABC, le triangle trirectangle étant pris pour unité. Donc

$$\mathrm{BLMN} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{B}}\cdot\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{B}}\cdot\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{M}}\cdot\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}} = \sqrt{\overline{\mathrm{BOC}}}.\sqrt{\overline{\mathrm{COA}}}.\sqrt{\overline{\mathrm{AOB}}}.$$

Par conséquent, l'*aire d'un triangle sphérique est donnée par l'argument du quaternion qui a pour valeur le produit des racines carrées des trois côtés, comptés dans l'ordre direct.*

Exemple. Soient donnés les trois sommets (art. 616)

$$\mathrm{A} = -264\,\mathrm{I}_1 - 739\,\mathrm{I}_2 + 616\,\mathrm{I}_3,$$
$$\mathrm{B} = 1000\,\mathrm{I}_1,$$
$$\mathrm{C} = -397\,\mathrm{I}_1 + 918\,\mathrm{I}_2,$$

On a $\mathrm{L} = \frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{\mathfrak{T}(\mathrm{B}+\mathrm{C})}$, etc., d'où l'on pourra calculer le produit $-\mathrm{LMN}$. Mais comme l'aire du triangle ne dépend que de l'argument de ce produit, on peut faire abstraction du module et chercher simplement l'argument du produit

$$\mathrm{BLMN} = \mathrm{I}_1(\mathrm{B}+\mathrm{C})(\mathrm{C}+\mathrm{A})(\mathrm{A}+\mathrm{B}),$$
$$= \mathrm{I}_1(603\,\mathrm{I}_1 + 918\,\mathrm{I}_2)(-661\,\mathrm{I}_1 + 179\,\mathrm{I}_2 + 616\,\mathrm{I}_3)(736\,\mathrm{I}_1 - 739\,\mathrm{I}_2 + 616\,\mathrm{I}_3)$$
$$= -472 + 1123\,\mathrm{I}_1 - 3\,\mathrm{I}_2 - 2\,\mathrm{I}_3.$$

On trouve ainsi

$$\operatorname{tang}\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1123}{472} = -2.379, \quad \varphi - \frac{\pi}{2} = 1^{\mathrm{q}},253.$$

d'où l'excès sphérique $= 2^q,506$, valeur qui est le rapport de l'aire du triangle donné à celle du triangle rectangle, et qui s'accorde sensiblement avec celle que nous aurions déduite des valeurs de α', β', γ', calculées dans l'art. 616.

§ III.

Propriétés du quadrilatère sphérique.

624. Soient

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} A &= \cos\alpha + \text{A}'\sin\alpha = -\text{AB},\\ B &= \cos\beta + \text{B}'\sin\beta = -\text{BC},\\ C &= \cos\gamma + \text{C}'\sin\gamma = -\text{CD},\\ D &= \cos\delta + \text{D}'\sin\delta = -\text{DA}\end{aligned}\right.$$

les quatre côtés d'un quadrilatère sphérique, A', B', C', D' étant respectivement leurs pôles positifs. On a identiquement

$$\frac{\text{B}'}{\text{A}'}\cdot\frac{\text{C}'}{\text{B}'} = \frac{\text{D}'}{\text{A}'}\cdot\frac{\text{C}'}{\text{D}'},$$

c'est-à-dire, A', B', C', D' étant les côtés du quadrilatère polaire,

$$A'.B' = \overline{D}'.\overline{C}',$$

ou

$$(\cos\alpha' + \text{A}\sin\alpha')(\cos\beta' + \text{B}\sin\beta') = (\cos\delta' - \text{D}\sin\delta')(\cos\gamma' - \text{C}\sin\gamma').$$

En opérant par $\mathfrak{V}$ sur cette équation, et ayant égard aux équations (1), il vient

$$\begin{aligned}\text{A}\sin\alpha'\cos\beta' + \text{B}\cos\alpha'\sin\beta' - \text{A}'\sin\alpha\sin\alpha'\sin\beta'\\ = -\text{C}\sin\gamma'\cos\delta' - \text{D}\cos\gamma'\sin\delta' - \text{C}'\sin\gamma\sin\gamma'\sin\delta'.\end{aligned}$$

Soit maintenant P un vecteur quelconque, AP, BP, ... les angles qu'il fait avec les vecteurs A, B, ... En opérant par $\mathfrak{S}\text{P}\times$ sur l'équation précédente, il vient

$$\begin{aligned}0 = \cos\text{AP}\sin\alpha'\cos\beta' + \cos\text{BP}\cos\alpha'\sin\beta' - \cos\text{A}'\text{P}\sin\alpha\sin\alpha'\sin\beta'\\ + \cos\text{CP}\sin\gamma'\cos\delta' + \cos\text{DP}\cos\gamma'\sin\delta' - \cos\text{C}'\text{P}\sin\gamma\sin\gamma'\sin\delta',\end{aligned}$$

où l'on peut remplacer cos A′P, cos C′P par sin PA_1, sin PC_1, en désignant par PA_1, PC_1 les arcs perpendiculaires abaissés de P sur les côtés A et C.

625. On a [art. 551, (22)] l'identité

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{V}_{AB}.\mathfrak{V}_{CD}) = \mathfrak{S}_{AD}.\mathfrak{S}_{BC} - \mathfrak{S}_{AC}.\mathfrak{S}_{BD}.$$

En mettant pour les produits ab, cd, ... leurs valeurs (1), et désignant, de plus, les diagonales du quadrilatère par

$$K = \cos\kappa + \mathrm{k}'\sin\kappa = -\mathrm{ac},$$
$$L = \cos\lambda + \mathrm{l}'\sin\lambda = -\mathrm{bd},$$

et de même pour le quadrilatère polaire, on aura

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{V}_{AB}.\mathfrak{V}_{CD}) = \sin\alpha\sin\gamma.\mathfrak{S}_{A'C'} = -\sin\alpha\sin\gamma\cos\kappa'.$$

d'où

$$\sin\alpha\sin\gamma\cos\kappa' = \cos\kappa\cos\lambda - \cos\beta\cos\delta,$$

ou

$$\sin AB\sin CD\cos(AB, CD) = \cos AC\cos BD - \cos BC\cos DA,$$

ce qui est le théorème connu de Gauss.

CHAPITRE X.

COMPOSITION DES ROTATIONS.

§ Ier.

Rotations autour d'axes fixes.

626. Soit une biradiale $LOM = A = \mathbf{a}\,\text{A}^{\alpha}$, et soit R un vecteur perpendiculaire à l'axe A. Le produit $\text{R}A = \mathbf{a}\,\text{R}\,\text{A}^{\alpha}$ exprimera (art. 552) ce que deviendra le vecteur R après qu'on aura fait croître sa longueur dans le rapport de 1 à $\mathbf{a}$, et qu'il aura tourné autour de A de l'angle α.

Mais il n'en est plus ainsi lorsque R n'est pas perpendiculaire à A. On décomposera alors R en deux composantes : l'une $\text{R}_{,}$ perpendiculaire à A, et que l'on multipliera par $\mathbf{a}\,\text{A}^{\alpha}$; l'autre $\text{R}_{\prime}$ parallèle à A, et que l'on multipliera seulement par $\mathbf{a}$. De cette manière, le vecteur résultant de cette opération sera exprimé par $\mathbf{a}(\text{R}_{,}\text{A}^{\alpha} + \text{R}_{\prime})$.

627. Soit maintenant B une biradiale unitaire quelconque; considérons le produit

$$B^{-1}\text{R}B.$$

En supposant R parallèle à l'axe B de cette biradiale B, on aura

$$\begin{aligned} B^{-1}\text{R}B &= (\cos\beta - \text{B}\sin\beta)\,\text{R}\,(\cos\beta + \text{B}\sin\beta) \\ &= \cos^2\beta.\text{R} + \cos\beta\sin\beta\,(\text{RB} - \text{BR}) - \sin^2\beta.\text{BRB}, \end{aligned}$$

ou, en remarquant que B et R ne diffèrent que par un facteur numérique, et que $\text{B}^2 = -1$,

$$B^{-1}\text{R}B = (\cos^2\beta + \sin^2\beta)\,\text{R} = \text{R}.$$

Si, au contraire, R est perpendiculaire à B, alors $-$ BR $= \frac{R}{B}$ est une biradiale rectangle $=$ RB, d'où BRB $= -$ RB$^2 =$ R. Donc alors

$$B^{-1}RB = R(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + 2RB\cos\beta\sin\beta$$
$$= R(\cos 2\beta + B\sin 2\beta) = R.B^{2\beta}.$$

Donc l'opération sur le vecteur R, indiquée par $B^{-1}RB$, B étant une biradiale dont le plan contient R, revient à faire tourner R de l'angle 2β autour de B.

Si R est un vecteur oblique à B, et qu'on le décompose en $R_,$ parallèle à B et $R_{,}$ perpendiculaire à B, on aura, en remarquant que $R_,$ ne change pas lorsqu'on lui imprime la rotation représentée par $\times\ B^{2\beta}$,

$$B^{-1}RB = B^{-1}(R_, + R_{,})B = R_, + R_{,}B^{2\beta}$$
$$= R_,B^{2\beta} + R_{,}B^{2\beta} = RB^{2\beta}.$$

Or $R_, + R_{,}B^{2\beta}$ représente évidemment la position du vecteur R, lorsqu'on l'a fait tourner de l'angle 2β autour de B. Donc

$$B^{-1}RB = RB^{2\beta}$$

exprime, dans tous les cas, la position du vecteur R après une rotation égale à 2β autour de l'axe B, rotation exprimée par le symbole

$$B^{-1}\ldots B = \ldots \times B^{2\beta}. \qquad (1)$$

Cette règle est la même que nous avons établie d'une autre manière (art. 515, 4°).

628. Au lieu d'un vecteur R, on peut prendre une biradiale $R = r_0 + r_1 = R^\rho$, et l'on a

$$B^{-1}RB = r_0 + B^{-1}r_1B = S^\rho,$$

S^ρ étant une biradiale d'axe S différent de R, et de même argument ρ que R^ρ; car, d'après ce que nous savons (art. 507), les deux produits

$$B(B^{-1}R^\rho) = R^\rho \quad \text{et} \quad (B^{-1}R^\rho).B$$

formés avec les mêmes facteurs pris dans l'ordre inverse, ont même argument.

Les axes R et S font avec B des angles égaux (art. 617), de sorte que S est ce que devient R après avoir tourné autour de B en vertu de la même rotation par laquelle R^ρ devient S^ρ. Si donc on pose (art. 552)

$$S = B^{-\beta} R B^{\beta},$$

on aura ce théorème :

$$S^\rho = B^{-1} R^\rho B = (B^{-\beta} R . B^{\beta})^\rho .$$

629. Si à une rotation $A^{2\alpha}$ succède une autre rotation $B^{2\beta}$, leur effet sur le vecteur R ou sur la biradiale *R* sera exprimé par un symbole de la forme

$$B^{-1} A^{-1} . R . AB = \overline{AB} . R . AB .$$

Donc la composition des rotations successives s'effectue en multipliant entre elles deux biradiales ayant pour axes les axes de rotation A, B, et pour arguments les deux demi-angles de rotation. Ainsi, la composition des rotations 2α, 2β autour des axes A, B se réduit à la multiplication des biradiales A^α, B^β.

630. Dans le cas des rotations infinitésimales, $A = A^\alpha = \cos\alpha + A \sin\alpha$ devient, aux infiniment petits près du second ordre,

$$A = A^\alpha = 1 + A\alpha,$$

et l'on a de même

$$B = B^\beta = 1 + B\beta,$$

d'où l'on tire, avec la même approximation,

$$AB = 1 + A\alpha + B\beta .$$

En composant les vecteurs $A\alpha$, $B\beta$, de grandeurs proportionnelles aux rotations, on a l'axe de la rotation résultante, représenté proportionnellement par

$$C\gamma = A\alpha + B\beta .$$

Dans ce cas, les deux rotations sont commutatives.

631. Considérons les deux rotations 2α, 2β, autour de deux axes rectangulaires A, B. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^{\alpha}\mathrm{B}^{\beta} &= (\cos\alpha + \mathrm{A}\sin\alpha).(\cos\beta + \mathrm{B}\sin\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta + \mathrm{A}\cos\beta\sin\alpha + \mathrm{B}\cos\alpha\sin\beta - \mathrm{C}\sin\alpha\sin\beta, \end{aligned}$$

où l'on a fait $\mathrm{AB} = -\mathrm{C}$, C étant un troisième axe perpendiculaire à chacun des deux autres.

Pour $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$, les deux rotations 2α, 2β étant chacune d'un quadrant,

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{B}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{C}) &= \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \cos\frac{\pi}{3} + \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Donc l'effet de ces deux rotations combinées équivaut à une rotation de l'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'axe $\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}$, également incliné sur les axes A, B, $-\mathrm{C}$.

Si aux deux rotations de $\frac{\pi}{2}$ autour de A, B, on en fait succéder une troisième, aussi d'un quadrant, autour de C, on a

$$\mathrm{A}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{B}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{C}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1+\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1+\mathrm{C}}{\sqrt{2}} = \frac{1+\mathrm{B}}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{B}\sin\frac{\pi}{4} = \mathrm{B}^{\frac{\pi}{4}},$$

à cause de $-\mathrm{A} = -\mathrm{CB} = \mathrm{BC}$, $-\mathrm{B} = -\mathrm{AC}$. Donc l'effet des trois rotations successives est le même que celui de la rotation intermédiaire, d'un quadrant autour de l'axe B.

632. Dans le cas le plus général de la rotation autour de trois axes rectangulaires A, B, C, on a

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}^{\alpha}\mathrm{B}^{\beta}\mathrm{C}^{\gamma} \\ &= \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \mathrm{A}\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \mathrm{B}\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma - \mathrm{C}\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ &+ \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma - \mathrm{A}\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + \mathrm{B}\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \mathrm{C}\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma. \end{aligned}$$

Si les rotations 2α, 2γ sont chacunes $=+\frac{\pi}{2}$, d'où

$$\cos\alpha = \sin\alpha = \cos\gamma = \sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

et que 2β soit $=-\frac{\pi}{2}$, d'où $\cos\beta = -\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on aura

$$\mathrm{A}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{B}^{-\frac{\pi}{4}}\mathrm{C}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{C}}{\sqrt{2}},$$

ce qui est une biradiale rectangle, ayant son axe dirigé suivant la bissectrice de l'angle AOC (art. 617). Donc $\mathrm{A}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{B}^{-\frac{\pi}{4}}\mathrm{C}^{\frac{\pi}{4}}$ correspond à une rotation d'un angle π autour de la bissectrice $\mathrm{A}+\mathrm{C}$, comme il est aisé de le vérifier directement.

633. *Vice versa,* toute rotation peut se décomposer en deux rotations d'une demi-révolution chacune. C'est ce que nous avons établi directement (art. 514), et on peut encore le déduire des considérations précédentes. En effet, une biradiale $\mathrm{BOC} = A = \mathrm{A}^{\alpha}$ est exprimable par le rapport $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}$ de deux vecteurs faisant entre eux l'angle α. On a donc

$$\mathrm{A}^{-\alpha}\mathrm{R}\mathrm{A}^{\alpha} = \mathrm{C}^{-1}\mathrm{B}\mathrm{R}\mathrm{B}^{-1}\mathrm{C}.$$

Or, $\mathrm{B}\mathrm{R}\mathrm{B}^{-1} = \mathrm{B}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{R}\mathrm{B}^{-\frac{\pi}{2}}$ représente une rotation de grandeur $2\frac{\pi}{2}$ autour de B, puis $\mathrm{C}^{-1}\ldots\mathrm{C}$ est l'indication d'une nouvelle rotation de même grandeur autour de C. Donc la rotation $\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}\right)^{-1}\mathrm{R}\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}\right)$ équivaut à deux demi-révolutions, l'une autour de l'axe B, l'autre autour de l'axe C.

§ II.

Rotations autour d'axes mobiles.

634. Désignons, pour abréger, par $(\mathrm{A}, 2\alpha)$ une rotation de grandeur 2α autour de l'axe OA.

Si à la rotation $(\mathrm{B}, 2\beta)$ succède la rotation $(\mathrm{A}', 2\alpha)$, A' étant la position prise par le vecteur A, par suite de la rotation $(\mathrm{B}, 2\beta)$, l'effet final sera le même que si l'on avait d'abord

imprimé au système la rotation (A, 2α), puis la rotation (B, 2β).

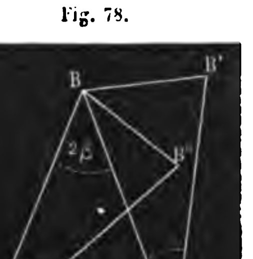


Fig. 78.

En effet, en faisant tourner le système de 2β autour de OB, le point A passe en A'. D'autre part, en le faisant tourner de 2α autour de OA, B passe en B''; en le faisant tourner ensuite de 2β autour de OB, l'égalité des triangles BAB'', BA'B' donne BB'' $=$ BB' et angle B''BB' $=$ ABA' $= 2\beta$. Donc B'' arrivera en B' par cette rotation. Donc, si nous représentons, comme dans l'article 515, par le signe $\times$ le résultat de la combinaison de deux rotations, l'effet de chacune des combinaisons

$$(\text{A}, 2\alpha) \times (\text{B}, 2\beta), \quad (\text{B}, 2\beta) \times (\text{A}', 2\alpha)$$

sera de faire arriver les axes OA, OB respectivement en OA', OB', et par suite le système prendra dans les deux cas la même position finale. Donc ces deux combinaisons sont équivalentes, ce que nous exprimerons par la formule

$$(\text{A}, 2\alpha) \times (\text{B}, 2\beta) = (\text{B}, 2\beta) \times (\text{A}', 2\alpha) = (\text{B}, 2\beta) \times (\text{B}^{-\beta}\text{A}\,\text{B}^{\beta}, 2\alpha),$$

d'où, les biradiales correspondantes étant égales,

$$\text{A}^{\alpha}\text{B}^{\beta} = \text{B}^{\beta}\text{A}'^{\alpha} = \text{B}^{\beta}.(\text{B}^{-\beta}\text{A}\,\text{B}^{\beta})^{\alpha}.$$

635. *Exemple.* Soient A et B deux axes rectangulaires entre eux, et considérons la rotation composée

$$(\text{B}, 2\beta) \times (\text{A}', 2\alpha),$$

où $\text{A}' = \text{B}^{-\beta}\text{A}\,\text{B}^{\beta}$. L'axe B étant perpendiculaire à A, pour faire tourner A de 2β, il suffit de le multiplier par $\text{B}^{2\beta}$ (art. 627), ce qui donne

$$\text{A}' = \text{A}\,\text{B}^{2\beta} = \text{A}(\cos 2\beta + \text{B}\sin 2\beta) = \text{A}\cos 2\beta - \text{C}\sin 2\beta,$$

$\text{C} = -\text{A}\text{B}$ étant perpendiculaire au plan AOB. Donc

$$\begin{aligned}
\text{B}^{\beta}\text{A}'^{\alpha} &= (\cos\beta + \text{B}\sin\beta)(\cos\alpha + \text{A}'\sin\alpha)\\
&= \cos\alpha\cos\beta + \text{A}(\sin\alpha\cos\beta\cos 2\beta + \sin\alpha\sin\beta\sin 2\beta)\\
&\quad + \text{B}\cos\alpha\sin\beta + \text{C}(-\sin\alpha\cos\beta\sin 2\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos 2\beta)\\
&= \cos\alpha\cos\beta + \text{A}\sin\alpha\cos\beta + \text{B}\cos\alpha\sin\beta - \text{C}\sin\alpha\sin\beta,
\end{aligned}$$

valeur que nous avions déjà trouvée (art. 618) pour le produit $A^{\alpha} B^{\beta}$.

636. ABC étant un triangle sphérique quelconque, on a (art. 615)

$$A^{\alpha'} B^{\beta'} C^{\gamma'} = 1,$$

pour le produit des biradiales qui ont pour arguments les angles extérieurs du triangle donné ou les côtés de son triangle polaire. Donc, si un corps tourne autour des arêtes d'un angle trièdre d'angles doubles des dièdres *intérieurs* de cet angle trièdre, il reviendra à sa position primitive. Car les angles $2\alpha', 2\beta', 2\gamma'$ sont égaux à $2(\pi - BAC)$, $2(\pi - CBA)$, $2(\pi - ACB)$, ou à $-2BAC$, $-2CBA$, $-2ACB$, c'est-à-dire au double des angles dièdres intérieurs de l'angle trièdre, pris en sens contraire.

Ce théorème, facile à retenir, peut servir à composer deux rotations en une seule. Il donne, en effet,

$$B^{\beta'} C^{\gamma'} = A^{-\alpha'},$$

A et α' étant déterminés au moyen de B, C, β', γ' par la résolution d'un triangle sphérique (art. 613).

On peut également se servir, pour le même but, de la relation

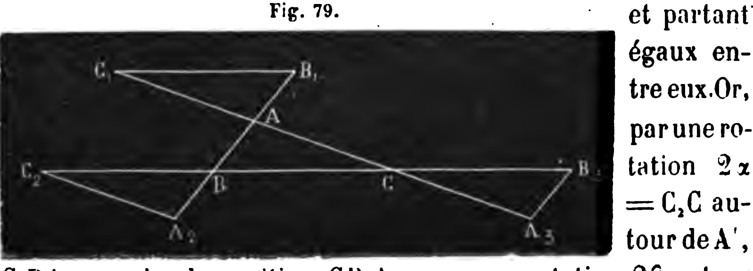
$$A'^{\alpha} B'^{\beta} C'^{\gamma} = 1,$$

que l'on démontre facilement comme il suit. Prenons (*fig.* 79)

$$C_2B = BC = CB_3, \quad A_3C = CA = AC_2, \quad B_1A = AB = BA_2,$$

Les trois triangles AB_1C_1, BC_2A_2, CA_3B_3 seront égaux à ABC, et partant égaux entre eux. Or, par une rotation $2\alpha = C_2C$ autour de A', C_2BA_2 prendra la position CB_3A_3; par une rotation 2β autour

Fig. 79.

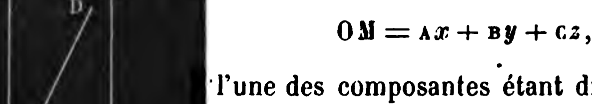


de B′, ce triangle vient en $C_1B_1A_1$, et enfin, par une rotation 2γ autour de C′, il reprend sa première position C_1BA_1.

637. Théorème. — *Si à la rotation autour du vecteur* $O\dot{D} = \mathrm{D}$ *succède une rotation autour d'un axe* PP′, *parallèle au vecteur* $OC = \mathrm{C}$, *le mouvement résultant sera composé de la rotation déterminée comme dans les articles* 629 *et* 636, *et d'un mouvement de translation.*

Menons, en effet, $OP = p$ perpendiculaire à PP′, et soit OM le vecteur d'un point quelconque M du système. On pourra décomposer OM en trois composantes rectangulaires,

Fig. 80.



$$OM = \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z,$$

l'une des composantes étant dirigée suivant OC, et l'une des deux autres A l'étant suivant OP. Par une rotation (C, ω) autour de OC, OM prend (art. 628) la position

$$\begin{aligned} OM' &= (\mathrm{A}x + \mathrm{B}y)\,\mathrm{C}^{\omega} + \mathrm{C}z \\ &= \mathrm{A}(x\cos\omega - y\sin\omega) + \mathrm{B}(y\cos\omega + z\sin\omega) + \mathrm{C}z, \end{aligned}$$

que l'on obtient en appliquant la formule

$$B^{-\frac{1}{2}}\mathrm{R}B^{\frac{1}{2}} = \mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2\mathrm{B}^{\beta},$$

où $\mathrm{R}_1 = \mathrm{C}z$ est parallèle à l'axe de rotation, et $\mathrm{R}_2 = \mathrm{A}x + \mathrm{B}y$ perpendiculaire à cet axe.

Si, au lieu de cela, le même point M, déterminé par

$$PM = OM - OP = \mathrm{A}(x - p) + \mathrm{B}z + \mathrm{C}z,$$

exécute la rotation (C, ω) autour de PP′, on aura, pour la nouvelle position M″,

$$PM'' = \mathrm{A}[(x-p)\cos\omega - y\sin\omega] + \mathrm{B}[y\cos\omega + (x-p)\sin\omega] + \mathrm{C}z,$$

d'où l'on tire, pour la distance des deux points M′, M″,

$$M'M'' = OM'' - OM' = OP + PM'' - OM' = \mathrm{A}p(1 - \cos\omega) - \mathrm{B}p\sin\omega,$$

expression indépendante de M. Donc l'effet de la rotation (c, ω) autour de PP′ diffère de celui de la rotation (c, ω) autour de OC seulement par une translation ou mouvement progressif égal à

$$M'M' = QP = OP - OQ,$$

en posant

$$OQ = p(\text{A}\cos\omega + \text{B}\sin\omega) = OP.c^{\omega},$$

et par suite Q étant la position que prend le point P en tournant de l'angle ω autour de OC. Donc les deux rotations, autour de OC et autour de PP′, ne diffèrent que par un mouvement progressif. De là résulte le théorème précédent, qui sert à composer les mouvements de rotation autour d'axes OD et PP′, non situés dans le même plan, théorème que l'on peut exprimer par l'équation

$$(OD, \psi) \times (PP', \omega) = (OD, \psi) \times (OC, \omega) + OP.c^{\omega},$$

OC étant parallèle à PP′.

§ III.

Mouvements rotatoires et progressifs.

638. Tout mouvement d'un corps solide se réduit à une rotation c^{ω}, puisque le passage d'un corps de la position OM à une autre position quelconque O′M′ peut s'effectuer au moyen d'une translation égale et parallèle à OO′, combinée avec une rotation c^{ω} autour d'un axe c passant dans la première position par O, dans la seconde par O′, et parallèle dans les deux cas à une même direction.

Il est facile de voir que, en choisissant convenablement le point S, on pourra faire en sorte que la rotation c^{ω} s'opère autour de l'axe SS′ passant par S, et que la translation soit parallèle à SS′. En effet, soient

$$OO' = \text{A}a + \text{B}b + \text{C}c, \quad OM = \text{A}x + \text{B}y + \text{C}z,$$

A et B étant deux vecteurs unitaires perpendiculaires entre eux

et à C. La nouvelle position M' de M s'obtiendra : 1° en faisant tourner le système autour de C; 2° en le transportant parallèlement à lui-même suivant OO'. Si donc M' est la position que prend M par l'effet de la rotation C^{ω}, on aura

$$OM' = OM' + OO',$$

d'où

$$\begin{aligned} MM' &= OM' - OM + OO' \\ &= A(x\cos\omega - y\sin\omega - x + a) + B(y\cos\omega + x\sin\omega - y + b) + Cc. \end{aligned}$$

MM' sera parallèle à OC, si l'on pose

$$x(\cos\omega - 1) - y\sin\omega + a = 0,$$
$$x\sin\omega + y(\cos\omega - 1) + b = 0,$$

c'est-à-dire pour tous les points de l'axe SS', parallèle à OC, et déterminé par les équations

$$x = \frac{1}{2}\left(a - b\cot\frac{\omega}{2}\right), \qquad y = \frac{1}{2}\left(b + a\cot\frac{\omega}{2}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned} OS &= \frac{1}{2}A\left(a - b\cot\frac{\omega}{2}\right) + \frac{1}{2}B\left(b + a\cot\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(Aa + Bb) + \frac{1}{2}(Ba - Ab)\cot\frac{\omega}{2}. \end{aligned}$$

639. Observons que, si à la droite $O'O = -Aa - Bb - Cc$ on fait exécuter autour de O' la rotation $C^{-\omega}$, O se placera en un point O°, tel que

$$\begin{aligned} O'O^{\circ} &= -(Aa + Bb)(\cos\omega - C\sin\omega) - Cc \\ &= A(-a\cos\omega - b\sin\omega) + B(-b\cos\omega + a\sin\omega) - Cc. \end{aligned}$$

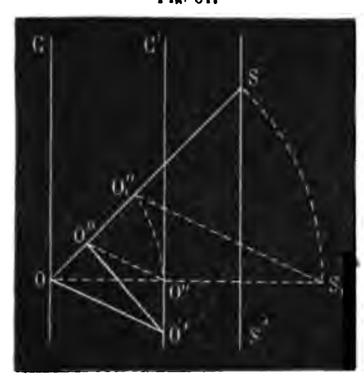
Donc

$$\begin{aligned} OO^{\circ} &= OO' + O'O^{\circ} \\ &= A(a - a\cos\omega - b\sin\omega) + B(b - b\cos\omega + a\sin\omega) \\ &= 4\,OS\sin^2\frac{\omega}{2}. \end{aligned}$$

Soit OO' perpendiculaire à OC. Le plan $OO'O^{\circ}$ est perpen-

diculaire à OC, et l'angle $OO''O^{\circ} = \omega$. Donc, $O^{\circ}O'$ étant égal à OO', et par suite les projections $O''O^{\circ}$, $O''O$ de ces lignes étant aussi égales, on a

Fig. 81.



$$OO^{\circ} = 2OO'' \sin\frac{\omega}{2} = 4\, OS \sin^2\frac{\omega}{2}.$$

Il s'ensuit de là que OS est une troisième proportionnelle à OO° et à OO''. En construisant donc

$$OS = OS_1 = \frac{OO''^2}{OO^{\circ}},$$

puis menant SS' parallèle à OC, on aura l'axe cherché.

640. Si, outre la rotation (c, ω) autour de O et la translation OO', le corps reçoit, dans sa nouvelle position, une dilatation ou une contraction, de manière à rester homothétique à lui-même, tandis que ses dimensions varient dans le rapport de 1 à r, on aura alors

$$\begin{aligned} O'M' &= r.c^{-\frac{\omega}{2}}.OM.c^{\frac{\omega}{2}} \\ &= r\text{A}(x\cos\omega - y\sin\omega) + r\text{B}(y\cos\omega + x\sin\omega) + r\text{C}z, \end{aligned}$$

et, pour que M' coïncide avec sa position primitive M, il faudra que l'on ait

$$O'M' = OM - OO' = \text{A}(x-a) + \text{B}(y-b) + \text{C}(z-c),$$

d'où l'on tire

$$x - a = r(x\cos\omega - y\sin\omega),$$
$$y - b = r(y\cos\omega + x\sin\omega), \qquad z - c = rz,$$

et par suite

$$x = \frac{a(1 - r\cos\omega) - br\sin\omega}{1 - 2r\cos\omega + r^2},$$
$$y = \frac{b(1 - r\cos\omega) + ar\sin\omega}{1 - 2r\cos\omega + r^2}, \qquad z = \frac{c}{1-r}.$$

On obtiendra ainsi le point unique S qui coïncide avec son an-

cienne position, et qui n'a pas varié dans le changement de lieu et de grandeur du corps.

641. Le point O exécutant autour de O′ le mouvement marqué par $r\text{C}^{-\omega}$, et venant se placer en O°, on aura

Fig. 82.



$$O'O^\circ = \text{A}r(-a\cos\omega - b\sin\omega) + \text{B}r(a\sin\omega - b\cos\omega) - \text{C}cr,$$

d'où

$$OO^\circ = OO' + O'O^\circ = \text{A}(a - ar\cos\omega - br\sin\omega) + \text{B}(b - br\cos\omega + ar\sin\omega) + \text{C}c(1-r).$$

La projection de OO° sur le plan perpendiculaire à C sera

$$OO^{\circ\circ} = \text{A}(a - ar\cos\omega - br\sin\omega) + \text{B}(b - br\cos\omega + ar\sin\omega),$$

et, si OS° est la projection analogue de OS, on a

$$OS = \text{A}x + \text{B}y + \text{C}z$$
$$= \text{A}\frac{a - ar\cos\omega - br\sin\omega}{1 - 2r\cos\omega + r^2} + \text{B}\frac{b - br\cos\omega + ar\sin\omega}{1 - 2r\cos\omega + r^2} + \frac{\text{C}c}{1-r}$$
$$= \frac{OO^{\circ\circ}}{1 - 2r\cos\omega + r^2} + \frac{\text{C}c}{1-r} = OS^\circ + S^\circ S.$$

Donc, à cause de $OO^\circ = OO^{\circ\circ} + O^{\circ\circ}O^\circ$, $O^{\circ\circ}O^\circ = \text{C}c(1-r)$,

$$OS = \frac{OO^{\circ\circ}}{1 - 2r\cos\omega + r^2}, \quad S^\circ S = \frac{O^{\circ\circ}O}{(1-r)^2}.$$

642. Dans le cas de r négatif, les deux corps OM, OM′ seront inversement semblables. Si l'on suppose, par exemple, $r = -1$, le point S qui coïncidera avec son correspondant sera donné par la forme

$$OS = \text{A}x + \text{B}y + \text{C}z.$$

On a d'ailleurs

$$OS = \text{A}(-x\cos\omega + y\sin\omega) + \text{B}(-y\cos\omega - x\sin\omega) - \text{C}z,$$

d'où l'on tire la valeur de $OS = OO' + O'S$, et, en l'identifiant avec $\text{A}x + \text{B}y + \text{C}z$, on en conclut

$$a - x - x\cos\omega + y\sin\omega = 0,$$
$$b - y - y\cos\omega - x\sin\omega = 0, \qquad c - z - z = 0,$$

et par suite

$$x = a + b\,\text{tang}\,\frac{\omega}{2}, \quad y = b - a\,\text{tang}\,\frac{\omega}{2}, \quad z = \frac{c}{2}\cdot$$

Si l'on fait faire à O autour de O' la rotation $(\text{c}, \pi - \omega)$, on aura

$$O'O^{oo} = -(\text{A}a + \text{B}b)(-\cos\omega + \text{c}\sin\omega)$$
$$= \text{A}(a\cos\omega + b\sin\omega) + \text{B}(b\cos\omega - a\sin\omega),$$

d'où

$$OO^{oo} = \text{A}a + \text{B}b + O'O^{oo}$$
$$= \text{A}(a + a\cos\omega + b\sin\omega) + \text{B}(b + b\cos\omega - a\sin\omega),$$

$$OS^{o} = \frac{OO^{oo}}{4\cos^2\frac{\omega}{2}}, \quad S^{o}S = \frac{c}{2}\cdot$$

643. Si nous supposons, r étant quelconque, que OO' soit perpendiculaire à l'axe de rotation, on pourra prendre $z = 0$, et alors, au lieu de la formule $r.B^{-\frac{1}{2}}\text{R}B^{\frac{1}{2}}$, employer la formule plus simple $r\text{R}B$. On a alors

$$OM - O'M = OO' = OM(1 - r\text{c}^{\omega}).$$

En posant $-r.OO'.\text{c}^{\omega} = r.O'O.\text{c}^{\omega} = O'\Omega$, on aura

$$(OO' + O'\Omega).OM = O\Omega.OM = OO'(1 - r\text{c}^{\omega}).OM = OO'^2,$$

d'où

$$OM = \frac{OO'^2}{O\Omega},$$

valeur facile à construire. On obtiendra ainsi le point immobile M.

En comparant cette solution à la précédente, on voit à quel point les formules se simplifient, lorsque les biradiales sont coplanaires; on peut éviter alors de décomposer toujours chaque vecteur suivant trois axes rectangulaires.

§ IV.

Transformation des coordonnées rectangulaires.

644. D'après ce que nous avons vu (art. 629), si l'on fait subir à un système un nombre quelconque de rotations autour d'axes passant par un même point, ces rotations peuvent se composer en une seule. Désignons par s^σ cette rotation,

$$\mathrm{s} = s_1 \mathrm{I}_1 + s_2 \mathrm{I}_2 + s_3 \mathrm{I}_3,$$

$\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3$ étant trois axes rectangulaires fixes; on a

$$\Sigma = \mathrm{s}^{\frac{1}{2}\sigma} = \cos\tfrac{1}{2}\sigma + \mathrm{s}\sin\tfrac{1}{2}\sigma = \cos\tfrac{1}{2}\sigma\,(1 + \lambda_1 \mathrm{I}_1 + \lambda_2 \mathrm{I}_2 + \lambda_3 \mathrm{I}_3),$$

en posant

$$\lambda_1 = s_1 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\sigma, \quad \lambda_2 = s_2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\sigma, \quad \lambda_3 = s_3 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\sigma.$$

Si l'on fait subir à un vecteur quelconque x la rotation s^σ, il prendra la position

$$\mathrm{x}' = \Sigma^{-1}\mathrm{x}\Sigma = \mathrm{s}^{-\frac{1}{2}\sigma}\mathrm{x}\,\mathrm{s}^{\frac{1}{2}\sigma},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathrm{x}'_1 \mathrm{I}_1 + \mathrm{x}'_2 \mathrm{I}_2 + \mathrm{x}'_3 \mathrm{I}_3 = \cos^2\tfrac{1}{2}\sigma . (1 - \lambda_1 \mathrm{I}_1 - \lambda_2 \mathrm{I}_2 - \lambda_3 \mathrm{I}_3)\,(\mathrm{x}_1 \mathrm{I}_1 + \mathrm{x}_2 \mathrm{I}_2 + \mathrm{x}_3 \mathrm{I}_3) \\ \times (1 + \lambda_1 \mathrm{I}_1 + \lambda_2 \mathrm{I}_2 + \lambda_3 \mathrm{I}_3), \end{aligned}$$

d'où, en effectuant les multiplications,

$$\begin{aligned} \operatorname{séc}^2\tfrac{1}{2}\sigma . \mathrm{x}'_1 &= (1 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2)\,\mathrm{x}_1 + 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3)\,\mathrm{x}_2 + 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_2)\,\mathrm{x}_3, \\ \operatorname{séc}^2\tfrac{1}{2}\sigma . \mathrm{x}'_2 &= 2(\lambda_2\lambda_1 + \lambda_3)\,\mathrm{x}_1 + (1 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2)\,\mathrm{x}_2 + 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1)\,\mathrm{x}_3, \\ \operatorname{séc}^2\tfrac{1}{2}\sigma . \mathrm{x}'_3 &= 2(\lambda_3\lambda_1 - \lambda_2)\,\mathrm{x}_1 + 2(\lambda_3\lambda_2 + \lambda_1)\,\mathrm{x}_2 + (1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\,\mathrm{x}_3, \end{aligned}$$

ce qui n'est autre chose que les formules d'Euler.

CHAPITRE XI.

GÉOMÉTRIE DE LA LIGNE DROITE ET DU PLAN.

645. Appliquons d'abord le calcul des quaternions à quelques propositions de Géométrie élémentaire.

I. Soit un triangle ABC, ayant les deux angles B, C égaux entre eux. Les biradiales $\frac{BA}{BC}, \frac{CA}{CB}$ auront des verseurs conjugués entre eux. En prenant donc A pour origine des vecteurs, et désignant par λ un coefficient réel, on aura

$$\frac{-\text{B}}{\text{C}-\text{B}} = \lambda . \mathfrak{C} \frac{-\text{C}}{\text{B}-\text{C}},$$

ou

$$(\text{B}-\text{C})^{-1}\text{B} = \lambda . \mathfrak{C}(\text{C}-\text{B})^{-1}\text{C} = \lambda . \text{C}(\text{C}-\text{B})^{-1}.$$

En opérant par $(\text{B}-\text{C})\times$, puis par $(\text{C}-\text{B})\times$, on a l'égalité

$$\text{B}(\text{C}-\text{B}) = \lambda(\text{B}-\text{C})\text{C},$$

ou

$$\text{BC}-\text{B}^2 = \lambda . \text{BC}-\lambda . \text{C}^2,$$

$$\mathfrak{S}\text{BC}+\mathfrak{V}\text{BC}-\text{B}^2 = \lambda . \mathfrak{S}\text{BC}+\lambda . \mathfrak{V}\text{BC}-\lambda . \text{C}^2.$$

Les vecteurs AB, AC n'étant pas parallèles entra eux, $\mathfrak{V}\text{BC}$ n'est pas nul. Il faut donc, pour que l'équation précédente subsiste, que l'on ait $1-\lambda=0$, d'où $\text{B}^2=\text{C}^2$. Le triangle est donc isoscèle.

En reprenant les raisonnements dans l'ordre inverse, on démontrerait la proposition réciproque.

II. Trouver sur la base BC d'un triangle ABC un point B d'où l'on puisse mener aux deux autres côtés AB, AC des parallèles DE, DF égales entre elles.

Les trois points B, D, C étant en ligne droite, si l'on fait $\frac{AE}{AC} = t$, on aura

$$t = \frac{BD}{BC} = \frac{BF}{BA} = 1 - \frac{AF}{BA}, \quad \text{d'où} \quad \frac{AE}{BA} = 1 - t;$$

donc, à cause de FD = AE,

$$AD = AF + FD = (1-t)AB + t.AC,$$

ou

$$D = (1-t)B + t.C.$$

Pour que l'on ait DE = CF, il faut que $(1-t).\mathfrak{T}B$ soit égal à $t.\mathfrak{T}C$. En désignant par u la valeur commune de ces deux quantités, on aura

$$(1-t)B = u.\mathfrak{U}B, \quad t.C = u.\mathfrak{U}C,$$

d'où

$$D = u(\mathfrak{U}B + \mathfrak{U}C),$$

et par suite (art. 622), AD est la bissectrice de l'angle BAC.

Nous avons supposé t et $1-t$ positifs; on pourra examiner de même le cas où l'une de ces quantités serait négative.

III. Dans un quadrilatère inscrit au cercle, le produit des côtés est réel.

Soient, en effet, A, B, C, D les quatre côtés, I l'axe du plan du quadrilatère, $(\widehat{A,B}) = \lambda$, $(\widehat{C,D}) = \mu$ deux angles opposés. On a, en désignant par $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ les modules des quatre côtés

$$AB = A^2.\frac{B}{A} = -\mathbf{ab}.I^{\lambda}, \quad CD = C^2.\frac{D}{C} = -\mathbf{cd}.I^{\mu},$$

d'où

$$ABCD = \mathbf{abcd}.I^{\lambda+\mu}.$$

Or $\lambda + \mu = \pi$, si le quadrilatère est convexe, et $= 0$, s'il est biconcave. Donc le produit ABCD est égal à $\pm\,\mathbf{abcd}$.

Si donc on connaît deux côtés A, B du quadrilatère inscrit, on aura les deux autres X et $-A-B-X$ au moyen de l'équation

$$(x) \qquad \mathfrak{P}ABX(A+B+X) = 0,$$

qui sera celle d'un cercle.

Exemple. Soient

$$\text{A} = \text{I}_1 + 2\text{I}_2, \qquad \text{B} = 3\text{I}_1 - \text{I}_3,$$

et représentons le troisième côté par $\text{X} = x_1\text{I}_1 + x_2\text{I}_2 + x_3\text{I}_3$. On aura

$$0 = \mathfrak{V}\{(\text{I}_1 + 2\text{I}_2)(3\text{I}_1 - \text{I}_3)(x_1\text{I}_1 + x_2\text{I}_2 + x_3\text{I}_3) \times [(4 + x_1)\text{I}_1 + (2 + x_2)\text{I}_2 + (x_3 - 1)\text{I}_3]\},$$

d'où, en effectuant et égalant séparément à zéro les coefficients de $\text{I}_1, \text{I}_2, \text{I}_3$, on tire trois équations

$$0 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1 + 3x_2 + 28x_3,$$
$$0 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_1 + 4x_2 - x_3,$$
$$0 = 6x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 16x_1 + 25x_2 - 12x_3,$$

qui se réduisent à deux équations distinctes, représentant l'intersection d'une sphère et d'un plan. Ainsi l'équation (X) représente bien un cercle.

646. Pour que deux vecteurs A, B soient parallèles, il faut que la biradiale $\frac{\text{B}}{\text{A}} = \frac{1}{\text{A}^2}\text{AB}$ ait son angle nul; il faut donc qu'elle se réduise à sa partie réelle et que son vecteur soit nul. Donc la condition de parallélisme est

$$\mathfrak{V}\text{AB} = 0.$$

Pour que les vecteurs A, B soient perpendiculaires entre eux, il faut que la même biradiale ait son angle droit et qu'elle se réduise à son vecteur. Donc la condition de perpendicularité est

$$\mathfrak{S}\text{AB} = 0.$$

Généralement, les vecteurs A, B faisant entre eux un angle θ, le verseur de la biradiale AB sera

$$\mathfrak{U}\text{AB} = \frac{\text{AB}}{\mathfrak{T}\text{AB}} = \cos\theta + \frac{\mathfrak{V}\text{AB}}{\mathfrak{T}.\mathfrak{V}\text{AB}}\sin\theta = \left(\frac{\mathfrak{V}\text{AB}}{\mathfrak{T}.\mathfrak{V}\text{AB}}\right)^{\theta}.$$

On aura, pour déterminer l'angle θ, les équations

$$\cos\theta = \frac{\mathfrak{S}_{AB}}{\mathfrak{T}_{AB}}, \quad \sin\theta = \frac{\mathfrak{T}.\mathfrak{V}_{AB}}{\mathfrak{T}_{AB}}.$$

De la dernière égalité on tire

$$\mathfrak{T}.\mathfrak{V}_{AB} = \mathfrak{T}_A.\mathfrak{T}_B \sin\theta.$$

Donc $\mathfrak{T}.\mathfrak{V}_{AB}$ représente le double de l'aire du triangle compris entre les vecteurs A et B.

647. L'équation du vecteur $OX = x$, prolongement de $OA = A$, peut se mettre sous l'une des formes

(1) $$x \parallel A, \quad x = tA, \quad \mathfrak{V}_{Ax} = 0, \quad \mathfrak{U}x = \mathfrak{U}A,$$

Ces équations sont toutes linéaires en x, et renferment, explicitement ou implicitement, une variable réelle t.

Si A, B, C sont trois vecteurs non coplanaires, en opérant par $\mathfrak{S}(\mathfrak{V}_{AB}\times)$ et par $\mathfrak{S}(\mathfrak{V}_{AC}\times)$ sur l'une des équations (1), on trouve

(2) $$\mathfrak{S}_{ABx} = 0, \quad \mathfrak{S}_{ACx} = 0.$$

Chacune de ces nouvelles équations, prise séparément, représente un plan [art. 551, (18)], puisqu'elle exprime que le vecteur x est coplanaire soit avec A et B, soit avec A et C. Donc l'ensemble de ces équations représente la ligne OA d'intersection de ces deux plans.

648. Réciproquement, pour résoudre les équations (2) et en tirer x en fonction de quantités connues, écrivons-les sous la forme

$$\mathfrak{S}(x.\mathfrak{V}_{AB}) = 0, \quad \mathfrak{S}(x.\mathfrak{V}_{AC}) = 0,$$

ce qui fait voir que x est perpendiculaire à chacun des vecteurs $\mathfrak{V}_{AB}, \mathfrak{V}_{AC}$, et par conséquent parallèle à l'axe de leur produit, d'où l'on tire (art. 649)

$$\begin{aligned} x &= t'.\mathfrak{V}(\mathfrak{V}_{AB}.\mathfrak{V}_{AC}), \\ &= t'(C.\mathfrak{S}_{ABA} - A.\mathfrak{S}_{ABC}) = -t'.A.\mathfrak{S}_{ABC}, \end{aligned}$$

ou simplement $x = tA$, en posant $-t'\mathfrak{S}_{ABC} = t$.

649. L'équation d'une parallèle menée par le point B à la droite $X = tA$, sera

(3) $$X = tA + B, \quad \text{ou} \quad \mathfrak{V}.A(X - B) = 0.$$

650. L'équation de la perpendiculaire à A, menée par le point P, sera de la forme

$$X = tC + P.$$

Pour que les vecteurs A et C soient perpendiculaires, il faudra que l'on ait

$$\mathfrak{S}AC = 0.$$

Ensuite A, P, C devant être coplanaires, on aura

$$\mathfrak{S}APC = 0, \quad \text{ou} \quad \mathfrak{S}(\mathfrak{V}AP.C) = 0;$$

C, étant donc perpendiculaire aux deux vecteurs A et $\mathfrak{V}AP$, sera parallèle à l'axe de leur produit, et l'on aura

$$C \parallel \mathfrak{V}(A.\mathfrak{V}AP).$$

Donc l'équation de la perpendiculaire cherchée sera

(4) $$X = t.\mathfrak{V}(A.\mathfrak{V}AP) + P.$$

On peut arriver autrement à ce résultat. On a, en effet,

$$P = A^{-1}AP = A^{-1}.\mathfrak{S}AP + A^{-1}.\mathfrak{V}AP.$$

Donc $A^{-1}.\mathfrak{V}AP$, qui est une perpendiculaire à A (puisque son produit par A est un vecteur), est coplanaire avec A et avec P. Donc c'est la direction de la perpendiculaire cherchée, d'où l'on tire l'équation (4), en remplaçant t par $-\frac{t}{(\mathfrak{T}A)^2}$.

651. Ainsi $-A^{-1}.\mathfrak{V}AP$ est le vecteur mené par l'extrémité de P perpendiculairement à la droite $X = tA$. Si l'on transporte maintenant l'origine au point P, on en conclura que

$$\Pi = -A^{-1}.\mathfrak{V}A(P - B)$$

est le vecteur allant de l'extrémité de P perpendiculairement vers la droite

(5) $$\mathrm{x} = t\mathrm{A} + \mathrm{B}.$$

On peut le voir plus simplement comme il suit. Si X est le pied de la perpendiculaire, celle-ci sera $\mathrm{x} - \mathrm{P}$. Cette droite devant être perpendiculaire à $\mathrm{x} = t\mathrm{A} + \mathrm{B}$, ou à sa parallèle A, on aura

$$\mathfrak{S}\mathrm{A}(\mathrm{x} - \mathrm{P}) = 0, \quad \text{ou} \quad \mathfrak{S}\mathrm{A}(t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P}) = 0,$$

d'où

$$t\mathrm{A} = \mathrm{A}^{-1}\mathfrak{S}\mathrm{A}(\mathrm{P} - \mathrm{B}),$$

$$\mathrm{x} - \mathrm{P} = t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P} = -\mathrm{A}^{-1}[\mathrm{A}(\mathrm{P} - \mathrm{B}) - \mathfrak{S}\mathrm{A}(\mathrm{P} - \mathrm{B})]$$
$$= -\mathrm{A}^{-1}.\mathfrak{V}\mathrm{A}(\mathrm{P} - \mathrm{B}),$$

comme ci-dessus. On a, pour la longueur de la perpendiculaire,

$$\mathfrak{T}\Pi = \mp \mathfrak{T}\mathfrak{V}[\mathfrak{U}\mathrm{A}.(\mathrm{P} - \mathrm{B})].$$

652. Le vecteur qui joint le point P à un point quelconque de la droite (5) est égal à

$$t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P}.$$

Pour que sa longueur soit un minimum, il faudra donc que l'on ait

$$d\mathfrak{T}(t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P}) = 0,$$

ou (art. 594)

$$0 = \mathfrak{T}(t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P})\, d\mathfrak{T}(t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P})$$
$$= -\mathfrak{S}[(t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P}).d(t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P})]$$
$$= -\mathfrak{S}[(t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P}).\mathrm{A}].dt = 0,$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{S}[(t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P})\mathrm{A}] = 0,$$

et par suite que le vecteur $t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P}$ soit perpendiculaire à A ou à $t\mathrm{A}$.

Cette équation donne

$$t\mathrm{A}^2 + \mathfrak{S}[\mathrm{A}(\mathrm{B} - \mathrm{P})] = 0, \quad \text{ou} \quad t\mathrm{A} = -\mathrm{A}^{-1}.\mathfrak{S}[\mathrm{A}(\mathrm{B} - \mathrm{P})].$$

Donc le vecteur perpendiculaire à A ou à la droite (5) est

$$\mathrm{B}-\mathrm{P}-\mathrm{A}^{-1}.\mathfrak{S}[\mathrm{A}(\mathrm{B}-\mathrm{P})]=\mathrm{A}^{-1}\{\mathrm{A}(\mathrm{B}-\mathrm{P})-\mathfrak{S}[\mathrm{A}(\mathrm{B}-\mathrm{P})]\}$$
$$=\mathrm{A}^{-1}.\mathfrak{V}[\mathrm{A}(\mathrm{B}-\mathrm{P})]=-\mathrm{A}^{-1}.\mathfrak{V}[\mathrm{A}(\mathrm{P}-\mathrm{B})],$$

comme on l'a trouvé dans l'art. précédent.

653. Cherchons maintenant *la plus courte distance de deux droites*, données par les équations

$$\mathrm{x}=t\mathrm{A}+\mathrm{B},\qquad \mathrm{x}'=t'\mathrm{A}'+\mathrm{B}'.$$

On posera $d\mathfrak{T}(\mathrm{x}'-\mathrm{x})=0$, ou

$$0=\mathfrak{S}[(\mathrm{x}'-\mathrm{x})(d\mathrm{x}'-d\mathrm{x})]=\mathfrak{S}[(\mathrm{x}'-\mathrm{x})(\mathrm{A}'dt'-\mathrm{A}dt)].$$

t et t' étant deux variables indépendantes, l'équation se décomposera dans ces deux-ci

$$\mathfrak{S}.(\mathrm{x}'-\mathrm{x})\mathrm{A}=0,\qquad \mathfrak{S}.(\mathrm{x}'-\mathrm{x})\mathrm{A}'=0,$$

équations qui expriment que la plus courte distance des deux droites est leur perpendiculaire commune.

Cette perpendiculaire est parallèle à $\mathfrak{V}\mathrm{A}\mathrm{A}'$, et par suite on a

(6) $$\mathrm{x}'-\mathrm{x}=t'\mathrm{A}'+\mathrm{B}'-t\mathrm{A}-\mathrm{B}=u.\mathfrak{V}\mathrm{A}\mathrm{A}'.$$

En opérant sur cette équation par $\mathfrak{S}\mathrm{A}\mathrm{A}'\times$, il vient

$$\mathfrak{S}[\mathrm{A}\mathrm{A}'(\mathrm{B}'-\mathrm{B})]=u.\mathfrak{S}(\mathrm{A}\mathrm{A}'.\mathfrak{V}\mathrm{A}\mathrm{A}')=u(\mathfrak{V}\mathrm{A}\mathrm{A}')^2,$$

ce qui détermine le coefficient u. La plus courte distance cherchée est

$$\mathfrak{T}(\mathrm{x}'-\mathrm{x})=\mathfrak{T}(u.\mathfrak{V}\mathrm{A}\mathrm{A}')=\mathfrak{T}\frac{\mathfrak{S}[\mathrm{A}\mathrm{A}'(\mathrm{B}'-\mathrm{B})]}{\mathfrak{V}\mathrm{A}\mathrm{A}'}=\frac{\mathfrak{S}[\mathfrak{V}\mathrm{A}\mathrm{A}'.(\mathrm{B}'-\mathrm{B})]}{\mathfrak{T}(\mathfrak{V}\mathrm{A}\mathrm{A}')}$$
$$=\mathfrak{T}\mathfrak{S}[\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathrm{A}\mathrm{A}'.(\mathrm{B}'-\mathrm{B})],$$

le signe $\mathfrak{T}$ mis devant $\mathfrak{S}$ indiquant simplement que la valeur numérique de la quantité doit être prise positivement.

Pour trouver les extrémités de la perpendiculaire commune, opérons sur (6) par $\mathfrak{S}.\mathrm{A}\times$ et par $\mathfrak{S}.\mathrm{A}'\times$; on trouvera ainsi

$$\mathfrak{S}.\mathrm{A}(\mathrm{x}'-\mathrm{x})=\mathfrak{S}(t'\mathrm{A}\mathrm{A}'+\mathrm{A}\mathrm{B}'-t\mathrm{A}^2-\mathrm{A}\mathrm{B})=u.\mathfrak{S}(\mathrm{A}.\mathfrak{V}\mathrm{A}\mathrm{A}')=0,$$

c'est-à-dire

$$t'.\mathfrak{S}AA' + \mathfrak{S}AB' - tA^2 - \mathfrak{S}AB = 0;$$

et de même

$$t'A'^2 + \mathfrak{S}A'B' - t.\mathfrak{S}AA' - \mathfrak{S}A'B = 0;$$

ces équations font connaître les valeurs de t, t', et par suite celles de x, x'.

654. Soit donné un tétraèdre OABC. La perpendiculaire AA' à la face OBC, abaissée du point A, est parallèle au vecteur de la biradiale BOC ou à $\mathfrak{V}BC$. Donc un vecteur mené dans le plan OAA' et rencontrant la hauteur AA', aura pour expression

$$A + \lambda.\mathfrak{V}BC,$$

λ étant un facteur réel indéterminé. De même, un vecteur rencontrant la hauteur BB' aura pour expression

$$B + \mu.\mathfrak{V}CA.$$

Pour qu'un même vecteur rencontre à la fois les deux hauteurs AA', BB', il faut que λ et μ soient tels que les deux vecteurs précédents soit parallèles, ou que le vecteur de leur produit soit nul, ce qui donne la condition

$$\begin{aligned}0 &= \mathfrak{V}.[(A + \lambda.\mathfrak{V}BC)(B + \mu.\mathfrak{V}CA)]\\ &= \mathfrak{V}AB + \lambda.\mathfrak{V}(\mathfrak{V}BC.B) + \mu.\mathfrak{V}(A.\mathfrak{V}CA) + \lambda\mu\mathfrak{V}(\mathfrak{V}BC.\mathfrak{V}CA)\\ &= \mathfrak{V}AB + \lambda(B.\mathfrak{S}CB - C\mathfrak{S}B^2) + \mu(A.\mathfrak{S}AC - C.\mathfrak{S}A^2)\\ &\qquad + \lambda\mu(A.\mathfrak{S}BC^2 - C.\mathfrak{S}BCA)\\ &= \mathfrak{V}AB + \lambda(B.\mathfrak{S}BC - B^2C) + \mu(A.\mathfrak{S}CA - A^2C) - \lambda\mu.C.\mathfrak{S}ABC.\end{aligned}$$

En opérant par $\mathfrak{S}B\times$, il vient

$$0 = \mu(\mathfrak{S}AB.\mathfrak{S}AC - A^2.\mathfrak{S}BC) - \lambda\mu.\mathfrak{S}BC.\mathfrak{S}ABC,$$

d'où l'on tire

$$\lambda.\mathfrak{S}ABC = \frac{\mathfrak{S}AB.\mathfrak{S}AC}{\mathfrak{S}BC} - A^2;$$

et de même, en opérant par $\mathfrak{S}_{\text{A}} \times$,

$$\mu.\mathfrak{S}_{\text{ABC}} = \frac{\mathfrak{S}_{\text{BC}}.\mathfrak{S}_{\text{BA}}}{\mathfrak{S}_{\text{CA}}} - \text{B}^2.$$

La symétrie de ces formules fait voir qu'en identifiant l'une des droites précédentes avec celle qui rencontrerait la hauteur CC′, on trouverait pour λ ou μ la même valeur, et de plus

$$\nu.\mathfrak{S}_{\text{ABC}} = \frac{\mathfrak{S}_{\text{CA}}.\mathfrak{S}_{\text{CB}}}{\mathfrak{S}_{\text{AB}}} - \text{C}^2.$$

On peut donc toujours mener par chaque sommet d'un tétraèdre une droite déterminée, rencontrant les quatre hauteurs. Donc ces quatre hauteurs sont rencontrées par quatre droites différentes; elles sont donc des génératrices d'un même système d'un hyperboloïde gauche.

On peut encore énoncer la proposition que nous venons de démontrer, en disant que si, par chaque arête d'un angle trièdre, on mène un plan perpendiculaire à la face opposée, ces trois plans ont une intersection commune.

655. Ce théorème peut encore se démontrer plus directement de la manière suivante.

Soient

$$\mathfrak{S}_{\text{AX}} = 0, \quad \mathfrak{S}_{\text{BX}} = 0, \quad \mathfrak{S}_{\text{CX}} = 0$$

les équations des trois faces. L'intersection des deux dernières est $\parallel \mathfrak{V}_{\text{BC}}$ (art. 658), et par suite la normale au plan $\parallel$ A et passant par l'intersection des deux faces en question sera perpendiculaire à $\mathfrak{V}_{\text{BC}}$; cette normale sera donc parallèle à

$$\mathfrak{V}(\text{A}.\mathfrak{V}_{\text{BC}}).$$

Donc le plan aura pour équation

$$\mathfrak{S}[\text{X}.\mathfrak{V}(\text{A}.\mathfrak{V}_{\text{BC}})] = 0.$$

On a d'ailleurs [art. 547, (9)]

$$\mathfrak{V}(\text{A}.\mathfrak{V}_{\text{BC}}) = \text{C}.\mathfrak{S}_{\text{AB}} - \text{B}.\mathfrak{S}_{\text{AC}},$$

Donc l'équation devient

$$0 = \mathfrak{S}(\text{xc}.\mathfrak{S}\text{AB} - \text{xb}.\mathfrak{S}\text{AC}) = \mathfrak{S}\text{AB}.\mathfrak{S}\text{CX} - \mathfrak{S}\text{AC}.\mathfrak{S}\text{BX}.$$

En formant par des permutations cycliques les équations des deux autres plans, et ajoutant les trois équations ainsi obtenues, la somme est identiquement nulle, ce qui démontre le théorème.

656. ***Étant donné un tétraèdre* OABC, *déterminer un système de trois axes rectangulaires, dont chacune passe par deux arêtes opposées de ce tétraèdre.***

Le sommet O étant pris pour origine, soit x le vecteur du point d'intersection des axes cherchés $\text{X}\iota_1$, $\text{X}\iota_2$, $\text{X}\iota_3$. La condition pour que le vecteur $\text{X}\iota_1$ coupe l'arête OA sera

$$(\alpha) \qquad \mathfrak{S}\iota_1\text{AX} = 0,$$

et pour qu'il coupe l'arête opposée BC, il faudra que l'on ait

$$(\beta) \quad \mathfrak{S}[\iota_1(\text{B}-\text{C})(\text{X}-\text{B})] = 0, \quad \text{ou} \quad \mathfrak{S}\{\iota_1[(\text{B}-\text{C})\text{X}-\text{BC}]\} = 0.$$

On a deux autres équations semblables à (α), et deux autres semblables à (β). Si donc on pose

$$\text{B}-\text{C} = \text{A}', \quad \mathfrak{V}\text{BC} = \text{A}'', \quad \mathfrak{V}\text{A}'\text{A} = \text{A}''',$$

et de même pour les autres, on aura les six équations

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}\iota_1\text{AX} &= 0, & \mathfrak{S}\iota_1\text{A}'\text{X} - \mathfrak{S}\iota_1\text{A}'' &= 0,\\
\mathfrak{S}\iota_2\text{BX} &= 0, & \mathfrak{S}\iota_2\text{B}'\text{X} - \mathfrak{S}\iota_2\text{B}'' &= 0,\\
\mathfrak{S}\iota_3\text{CX} &= 0, & \mathfrak{S}\iota_3\text{C}'\text{X} - \mathfrak{S}\iota_3\text{C}'' &= 0.
\end{aligned}$$

Des deux équations en ι_1 il résulte que ι_1 est perpendiculaire aux deux vecteurs $\mathfrak{V}\text{AX}$, $(\mathfrak{V}\text{A}'\text{X} - \text{A}'')$, et par suite parallèle au vecteur de leur produit

$$\mathfrak{V}[\mathfrak{V}\text{AX}.(\mathfrak{V}\text{A}'\text{X} - \text{A}'')],$$

lequel est égal [art. 547, (9), et art. 549, (13)] à

$$\begin{aligned}
&\text{X}.\mathfrak{S}\text{AXA}' - \text{A}'.\mathfrak{S}\text{AXX} - \text{A}.\mathfrak{S}\text{A}''\text{X} + \text{X}.\mathfrak{S}\text{AA}''\\
&\quad = -\text{A}.\mathfrak{S}\text{A}''\text{X} + \text{X}(\mathfrak{S}\text{AA}'' + \mathfrak{S}\text{A}'''\text{X}).
\end{aligned}$$

On obtiendra de même les expressions des vecteurs parallèles à I_2 et à I_3. Remplaçant I_1, I_2, I_3 par ces valeurs dans les conditions de perpendicularité

$$\mathfrak{S}\,\text{I}_2\text{I}_3 = 0, \quad \mathfrak{S}\,\text{I}_3\text{I}_1 = 0, \quad \mathfrak{S}\,\text{I}_1\text{I}_2 = 0,$$

on obtiendra trois équations du 4e ordre en X. Donc l'origine cherchée est donnée par l'intersection des trois surfaces du 4e ordre.

657. L'équation

$$(1) \qquad \mathfrak{S}\,\text{AX} = 0$$

exprime que X est une perpendiculaire quelconque au vecteur A; donc c'est l'équation du plan perpendiculaire à A, mené par l'origine.

Pour trouver cette équation directement, remarquons que, B et C étant deux vecteurs perpendiculaires à A, l'équation de ce plan peut s'écrire (art. 431)

$$\text{X} = t\text{B} + u\text{C}.$$

En opérant par $\mathfrak{S}\,\text{A}\times$, on éliminera les deux indéterminées t, u.

On peut aussi n'en éliminer qu'une, en opérant par $\mathfrak{V}\,\text{B}\times$, ce qui donne

$$\mathfrak{V}\,\text{BX} = t\mathfrak{V}\,\text{BB} + u\mathfrak{V}\,\text{BC} = u\text{A} \times \text{une quantité réelle},$$

A étant parallèle à $\mathfrak{V}\,\text{BC}$, ou simplement

$$\mathfrak{V}\,\text{BX} = u\text{A}.$$

On tire de là

$$0 = \mathfrak{V}(\text{A}.\mathfrak{V}\,\text{BX}) = \text{X}.\mathfrak{S}\,\text{AB} - \text{B}.\mathfrak{S}\,\text{AX},$$

d'où résulte, à cause de $\mathfrak{S}\,\text{AB} = 0$, $\mathfrak{S}\,\text{AX} = 0$, c'est-à-dire l'équation (7).

Pareillement

$$(8) \qquad \mathfrak{S}\,[\text{A}(\text{X} - \text{B})] = 0$$

est l'équation du plan mené par le point B perpendiculairement

à A. Cette équation est, comme la précédente, susceptible de diverses formes.

En général, toute équation de la forme

$$\mathfrak{S}\text{AX} = c$$

peut être identifiée avec l'équation (8), et représente un plan perpendiculaire au vecteur A. Pour avoir sa distance à l'origine, posons $\text{X} = \text{A}t$. Il vient

$$\mathfrak{S}\text{A}^2 t = \text{A}^2 t = \pm c,$$

d'où

$$t = \frac{c}{\text{A}^2}, \qquad \text{X} = \frac{c}{\text{A}}; \qquad \mathfrak{T}\text{X} = \frac{c}{\mathfrak{T}\text{A}},$$

pour la distance cherchée.

658. L'intersection des deux plans

$$(9) \qquad \mathfrak{S}[\text{A}(\text{X}-\text{B})] = 0, \qquad \mathfrak{S}[\text{A}'(\text{X}-\text{B}')] = 0$$

contient tous les points dont le vecteur X satisfait à la fois à ces deux équations. Mais, les vecteurs A, A', $\mathfrak{V}\text{AA}'$ n'étant pas coplanaires, on a [art. 550, (16)]

$$\begin{aligned}&\text{X}.\mathfrak{S}(\text{AA}'.\mathfrak{V}\text{AA}') = \\ &\quad \mathfrak{V}(\text{A}'.\mathfrak{V}\text{AA}').\mathfrak{S}\text{AX} + \mathfrak{V}(\mathfrak{V}\text{AA}'.\text{A}).\mathfrak{S}\text{A}'\text{X} + \mathfrak{V}\text{AA}'.\mathfrak{S}(\mathfrak{V}\text{AA}'.\text{X}),\end{aligned}$$

ou, en ayant égard aux équations (9),

$$\begin{aligned}&-\text{X}.(\mathfrak{T}.\mathfrak{V}\text{AA}')^2 \\ &\quad = \mathfrak{V}(\text{A}'.\mathfrak{V}\text{AA}').\mathfrak{S}\text{AB} + \mathfrak{V}(\mathfrak{V}\text{AA}'.\text{A}).\mathfrak{S}\text{A}'\text{B}' + \mathfrak{V}\text{AA}'.\mathfrak{S}\text{AA}'\text{X},\end{aligned}$$

ou enfin, en remarquant que $\mathfrak{S}\text{AA}'\text{X}$ est une quantité réelle indéterminée, que nous représenterons par t,

$$(10) \quad \begin{cases} -\text{X}.(\mathfrak{T}.\mathfrak{V}\text{AA}')^2 \\ \qquad = \mathfrak{V}(\text{A}'.\mathfrak{V}\text{AA}').\mathfrak{S}\text{AB} + \mathfrak{V}(\mathfrak{V}\text{AA}'.\text{A}).\mathfrak{S}\text{A}'\text{B}' + t.\mathfrak{V}\text{AA}', \end{cases}$$

expression du vecteur de la droite d'intersection des deux plans (9). Cette équation est moins commode dans la pratique que les deux équations simultanées (9).

Quand les deux plans donnés passent par l'origine, on a $\mathrm{B} = \mathrm{B}' = 0$, d'où l'on tire, pour l'équation de l'intersection,

$$\mathrm{X} = t.\mathfrak{V}\mathrm{A}\mathrm{A}'.$$

659. L'équation du plan passant par l'origine et par l'intersection des deux plans (9) sera

$$\mathfrak{S}\mathrm{A}'\mathrm{B}'.\mathfrak{S}\mathrm{A}\mathrm{X} - \mathfrak{S}\mathrm{A}\mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{A}'\mathrm{X} = 0$$

ou

$$\mathfrak{S}[(\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{A}'\mathrm{B}' - \mathrm{A}'.\mathfrak{S}\mathrm{A}\mathrm{B})\mathrm{X}] = 0.$$

C'est là, en effet, l'équation d'un plan passant par l'origine; de plus, si X est tel que l'on ait $\mathfrak{S}\mathrm{A}\mathrm{X} = \mathfrak{S}\mathrm{A}\mathrm{B}$, on aura aussi $\mathfrak{S}\mathrm{A}'\mathrm{X} = \mathfrak{S}\mathrm{A}'\mathrm{B}'$, et les équations (9) seront toutes les deux vérifiées.

On voit par là que le vecteur

$$\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{A}'\mathrm{B}' - \mathrm{A}'.\mathfrak{S}\mathrm{A}\mathrm{B}$$

est perpendiculaire à la ligne d'intersection (10) des deux plans (9), ainsi qu'à tout vecteur mené de l'origine à un point de cette ligne.

660. Cherchons *la distance d'un point donné* P *au plan* $\mathfrak{S}\mathrm{A}(\mathrm{X} - \mathrm{B}) = 0$. La perpendiculaire abaissée de P sur le plan étant parallèle au vecteur A, aura pour équation

$$\mathrm{X} = t\mathrm{A} + \mathrm{P},$$

et la longueur de la perpendiculaire sera celle de $\mathrm{X} - \mathrm{P} = t\mathrm{A}$. Pour déterminer t, opérons par $\mathfrak{S}\mathrm{A}\times$, ce qui donne, en vertu de l'équation du plan,

$$\mathfrak{S}[\mathrm{A}(t\mathrm{A} + \mathrm{B})] = t\mathrm{A}^2 + \mathfrak{S}\mathrm{A}\mathrm{P} = \mathfrak{S}\mathrm{A}\mathrm{B},$$

d'où

(1) $$\Pi = t\mathrm{A} = -\mathrm{A}^{-1}.\mathfrak{S}\mathrm{A}(\mathrm{P} - \mathrm{B}),$$

expression du vecteur qui va perpendiculairement du point P vers le plan.

Si le plan passe par l'origine, alors $\text{B} = 0$, et l'on a

$$\Pi = -\,\text{A}^{-1}\mathfrak{S}\text{AP}.$$

La longueur de la perpendiculaire Π donnée par l'équation (1) est

$$(2) \qquad \mathfrak{T}\Pi = \mathfrak{T}\text{A}^{-1}.\mathfrak{T}\mathfrak{S}\text{A}(\text{P}-\text{B}) = \mp\,\mathfrak{S}[\mathfrak{U}\text{A}.(\text{P}-\text{B})].$$

661. ***Trouver l'équation d'un plan passant par trois points donnés*** A, B, C.

Si X est le vecteur d'un point du plan, $\text{X}-\text{A}$, $\text{X}-\text{B}$, $\text{B}-\text{C}$ seront trois vecteurs coplanaires. On aura donc

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{S}[(\text{X}-\text{A})(\text{X}-\text{B})(\text{B}-\text{C})] \\ &= \mathfrak{S}[\text{X}(\text{BC}+\text{CA}+\text{AB})] - \mathfrak{S}\text{ABC} \\ &= \mathfrak{S}[\text{X}(\mathfrak{V}\text{BC}+\mathfrak{V}\text{CA}+\mathfrak{V}\text{AB})] - \mathfrak{S}\text{ABC}. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\text{D} = \mathfrak{V}\text{BC} + \mathfrak{V}\text{CA} + \mathfrak{V}\text{AB},$$

comme on a $\mathfrak{S}\text{DA} = \mathfrak{S}\text{ABC}$, l'équation pourra se mettre sous la forme (8)

$$\mathfrak{S}\text{D}(\text{X}-\text{A}) = 0.$$

Pour avoir le vecteur perpendiculaire mené de l'origine au plan, on posera $\text{X} = t\text{D}$, et l'équation

$$\mathfrak{S}\text{XD} - \mathfrak{S}\text{ABC} = 0$$

deviendra

$$t\text{D}^2 = \mathfrak{S}\text{ABC},$$

d'où

$$\text{X} = t\text{D} = \text{D}^{-1}.\mathfrak{S}\text{ABC} = \frac{\mathfrak{S}\text{ABC}}{\mathfrak{V}\text{BC}+\mathfrak{V}\text{CA}+\mathfrak{V}\text{AB}},$$

expression du vecteur cherché, d'où l'on peut déduire de nombreuses propriétés du tétraèdre.

$\mathfrak{S}\text{ABC}$ étant [art. 551, (17)] le sextuple du volume du tétraèdre OABC, l'équation

$$\mathfrak{S}\text{ABC} = \mathfrak{S}\text{XBC} + \mathfrak{S}\text{XCA} + \mathfrak{S}\text{XAB}$$

aurait pu s'obtenir immédiatement, en remarquant que, si X est

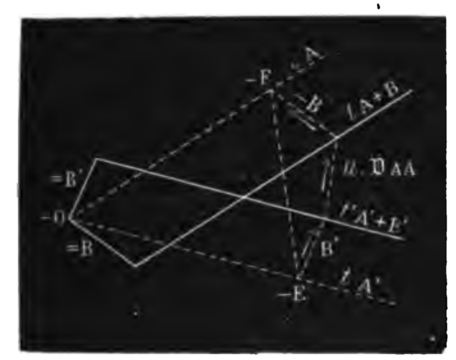
un point du plan de la base ABC, la volume du tétraèdre est égal à la somme algébrique des volumes des tétraèdres OXBC, OXCA, OXAB.

662. Soient les deux droites

$$x = t\text{A} + \text{B}, \qquad x = t'\text{A}' + \text{B}'.$$

L'équation d'un plan parallèle à ces deux droites et passant par le point C sera

Fig. 83.



$$(11) \quad \mathfrak{S}[\text{AA}'(x-\text{c})] = 0,$$

cette équation exprimant que les trois vecteurs A, A', $x-$C sont coplanaires.

Si C = B, le plan contiendra la première droite; si C = B', il contiendra la seconde.

Si $u.\mathfrak{V}\text{AA}'$ est la plus courte distance de ces deux lignes (art. 652), le vecteur $\text{EF} = \text{B}' + u.\mathfrak{V}\text{AA}' - \text{B}$ (*fig.* 83) étant coplanaire avec $t\text{A}$ et avec $t'\text{A}'$, on a

$$\mathfrak{S}[\text{AA}'(\text{B}' - \text{B} + u.\mathfrak{V}\text{AA}')] = 0.$$

Cette équation peut s'écrire ainsi

$$\mathfrak{S}[(\mathfrak{S}\text{AA}' + \mathfrak{V}\text{AA}')(\text{B} - \text{B}' - u.\mathfrak{V}\text{AA}')] = 0,$$

ou

$$u(\mathfrak{V}\text{AA}')^2 + \mathfrak{S}[\mathfrak{V}\text{AA}'.(\text{B}' - \text{B})] = 0,$$

ou, en divisant par $\mathfrak{T}(\mathfrak{V}\text{AA}')$,

$$\mathfrak{T}(u.\mathfrak{V}\text{AA}') = \mathfrak{T}\mathfrak{S}[(\text{B}' - \text{B}).\mathfrak{U}(\mathfrak{V}\text{AA}')],$$

comme nous l'avions trouvé (art. 653) par une autre voie.

663. ***Trouver l'équation d'un plan passant par l'origine et faisant des angles égaux avec trois lignes données. Déterminer la valeur commune de ces angles.***

Soient A, B, C les vecteurs unitaires qui marquent les directions des trois lignes données, et

$$\mathfrak{S}\text{RX} = 0$$

l'équation du plan cherché. Le cosinus de l'angle de ce plan avec A, ou le sinus de l'argument de la biradiale (A, R) est donné par l'équation

$$\mathfrak{S}\text{AR} = \mathfrak{T}\text{R}.\sin\varphi.$$

On devra donc avoir

$$\mathfrak{S}\text{AR} = \mathfrak{S}\text{BR} = \mathfrak{S}\text{CR} = t,$$

d'où

$$\sin\varphi = \frac{t}{\mathfrak{T}\text{R}}.$$

Or on a (art. 550)

$$\begin{aligned}\text{R}.\mathfrak{S}\text{ABC} &= \mathfrak{V}\text{BC}.\mathfrak{S}\text{AR} + \mathfrak{V}\text{CA}.\mathfrak{S}\text{BR} + \mathfrak{V}\text{AB}.\mathfrak{S}\text{CR} \\ &= t(\mathfrak{V}\text{BC} + \mathfrak{V}\text{CA} + \mathfrak{V}\text{AB}).\end{aligned}$$

Donc l'équation du plan sera

$$\mathfrak{S}[\text{X}(\mathfrak{V}\text{BC} + \mathfrak{V}\text{CA} + \mathfrak{V}\text{AB})] = 0,$$

et le sinus de l'angle cherché sera

$$\sin\varphi = \frac{\mathfrak{S}\text{ABC}}{\mathfrak{T}(\mathfrak{V}\text{BC} + \mathfrak{V}\text{CA} + \mathfrak{V}\text{AB})}.$$

664. ***Lieu des milieux des droites parallèles à un plan donné et s'appuyant sur deux droites fixes.***

Soient $\mathfrak{S}\text{CX} = 0$ l'équation du plan donné;

$$\text{X} = t\text{A} + \text{B}, \quad \text{X}' = t'\text{A}' + \text{B}'$$

les équations des droites fixes, et Y le milieu de X' — X. On aura les relations

$$\begin{aligned}2\text{Y} &= t\text{A} + \text{B} + t'\text{A}' + \text{B}', \\ 0 = \mathfrak{S}[\text{C}(\text{X}' - \text{X})] &= \mathfrak{S}[\text{C}(t'\text{A}' + \text{B}' - t\text{A} - \text{B})].\end{aligned}$$

Cette dernière équation donne une relation linéaire entre t et t',

de sorte que, en éliminant t' entre cette équation et la précédente, on obtient pour le lieu cherché une équation de la forme

$$\mathrm{Y} = t\mathrm{M} + \mathrm{N};$$

ce lieu est donc une droite.

Exemple. Soient

$$\mathfrak{S}[(\mathrm{I}_1 - 2\mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3)\mathrm{X}] = 0,$$

$$\mathrm{X} = (\mathrm{I}_1 + 2\mathrm{I}_2)t + 3\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_3, \quad \mathrm{X}' = \mathrm{I}_3 t' + 3\mathrm{I}_2 - 2\mathrm{I}_3$$

les équations du plan et des deux droites. On aura

$$2\mathrm{Y} = (\mathrm{I}_1 + 2\mathrm{I}_2)t + \mathrm{I}_3 t' + 3\mathrm{I}_1 + 3\mathrm{I}_2 - 3\mathrm{I}_3,$$

$$0 = \mathfrak{S}\{(\mathrm{I}_1 - 2\mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3)[(\mathrm{I}_1 + 2\mathrm{I}_2)t - \mathrm{I}_3 t' + 3\mathrm{I}_1 - 3\mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3]\}$$
$$= -t - 3 + 4t - 6 + t' - 1,$$

d'où

$$t' = 10 - 3t,$$

et par suite

$$2\mathrm{Y} = (\mathrm{I}_1 + 2\mathrm{I}_2 - 3\mathrm{I}_3)t + 3\mathrm{I}_1 + 3\mathrm{I}_2 + 7\mathrm{I}_3.$$

Telle est l'équation du lieu cherché.

665. Soit ABC un triangle, AT la tangente en A au cercle circonscrit, prolongée dans le sens direct ABC. L'angle γ des deux vecteurs BC, CA est égal au supplément de celui des vecteurs TA, AB. En désignant donc par I l'axe du plan ABC, et par k une quantité positive quelconque, abstraction faite de sa valeur, on aura

$$\mathrm{BC.CA} = -k.I^\gamma, \quad \mathrm{TA.AB} = -k.I^{\pi-\alpha} = k.I^\alpha,$$

d'où $\mathrm{AT.CA} = k.I^{-\alpha}$, et par suite

$$\mathrm{TA.AB.BC.CA} = -k,$$

ou, en opérant par $(\mathrm{TA})^{-1} = \frac{\mathrm{AT}}{(\mathfrak{T}\mathrm{AT})^2}$ premier facteur,

$$\mathrm{AB.BC.CA} = -k.\mathrm{AT}.$$

Soit maintenant ABCD un quadrilatère gauche, AU la

tangente en A au cercle circonscrit au triangle ACD. On aura de même

$$AC.CD.DA = -k.AU.$$

Donc, en remarquant que $CA.AC = -AC^2 = (\mathcal{T}AC)^2$ est une quantité positive, on aura

$$(1) \qquad AB.BC.CD.DA = k.AT.AU = -k.\frac{AU}{AT},$$

ce qui détermine le plan et l'axe de la biradiale TAU.

Si le quadrilatère ABCD est inscrit à une sphère, le plan de cette biradiale est le plan tangent à la sphère en A, et son axe est le rayon OA de la sphère, dirigé dans un sens tel que le mouvement de AU vers AT se fasse relativement à ce rayon dans le sens direct.

Si l'on donne, par exemple,

$$AB = \mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_2, \quad BC = \mathrm{I}_1 + 2\mathrm{I}_3, \quad CD = \mathrm{I}_1, \quad DA = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2,$$

on aura

$$AB.BC.CD.DA = -1 - 3\mathrm{I}_1 - 3\mathrm{I}_2 - \mathrm{I}_3,$$

ce qui déterminera le vecteur $OA = k(-3\mathrm{I}_1 - 3\mathrm{I}_2 - \mathrm{I}_3)$ du point A.

Pour avoir le vecteur du point B, on fera le produit

$$BC.CD.DA.AB = -1 + 3\mathrm{I}_1 + 3\mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3.$$

On voit que ce vecteur $= -OA$ est dirigé suivant la même droite que OA. D'ailleurs, OA étant l'axe correspondant au sens du mouvement du plan DAC vers CAB, et OB à celui du mouvement du plan DAB vers DBC, ces deux mouvements seront contraires, puisque DAC se confond avec DBC, et par suite AU avec BT′, de sorte que les deux rotations ramènent la tangente à la même position. Donc si OA est l'axe de l'un des mouvements, et $OB = -OA$ celui de l'autre, il faut que le point B coïncide avec le point A.

On aurait de même, pour les vecteurs des autres sommets,

$$OC = -\mathrm{I}_1 - 3\mathrm{I}_2 + 3\mathrm{I}_3, \qquad OD = -\mathrm{I}_1 + 3\mathrm{I}_2 - 3\mathrm{I}_3.$$

666. Soit E un cinquième point de la sphère ABCD. La tangente en A au cercle ADE sera

$$AD.DE.EA = -k.AV.$$

En multipliant cette équation par l'équation (1) de l'article précédent, il vient

$$AB.BC.CD.DE.EA = -k.AT.AU.AV$$

= le produit de trois droites coplanaires, et par suite = un vecteur situé dans le plan tangent à la sphère en A. Donc le produit des cinq côtes d'un pentagone inscrit dans une sphère est une tangente à la sphère au sommet initial A.

Exemple. Supposons une sphère tangente en A au vecteur $AB = \text{I}_1 - \text{I}_2$, et passant par les points C, D, déterminés par les vecteurs

$$AC = \text{I}_1 + 2\text{I}_3, \qquad CD = 3\text{I}_1.$$

Cherchons le point E de cette sphère, situé sur la droite DE, parallèle à I_3. En posant $DE = z\text{I}_3$, on aura

$$EA = -4\text{I}_1 - (z+2)\text{I}_3.$$

Il faudra déterminer z de manière que la partie réelle du produit

$$(\text{I}_1 - \text{I}_2)(\text{I}_1 + 2\text{I}_3).3\text{I}_1.\text{I}_3 z.[-4\text{I}_1 - (z+2)\text{I}_3]$$
$$= 3z[-2z - 8 + (6-z)\text{I}_1 + (z-6)\text{I}_2 + (4z+8)\text{I}_3]$$

s'annule, ce qui a lieu soit pour $z = 0$, soit pour $z = -4$. Cette dernière solution donne $DE = -4\text{I}_3$, $AE = 4\text{I}_1 - 2\text{I}_3$, et le vecteur $10\text{I}_1 - 10\text{I}_2 - 8\text{I}_3$ de ce produit sera tangent à la sphère en A.

667. *On donne des points* A, A′, A″, ..., *en nombre quelconque. Trouver un plan passant par l'origine, et tel que la somme des carrés des perpendiculaires abaissées de ces paints sur le plan soit un minimum.*

Soit $\mathfrak{S}\text{XY} = 0$ l'équation du plan cherché, Y étant le para-

mètre inconnu, dont nous pourrons supposer le module $\mathfrak{T}\text{Y} = 1$. Les perpendiculaires à ce plan seront (art. 659)

$$-\text{Y}.\mathfrak{S}\text{AY}, \quad -\text{Y}.\mathfrak{S}\text{A}'\text{Y}, \ldots.$$

Les carrés de ces expressions étant

$$-(\mathfrak{S}\text{AY})^2, \quad -(\mathfrak{S}\text{A}'\text{Y})^2, \ldots,$$

on voit que la condition de la question revient à rendre la quantité $\sum(\mathfrak{S}\text{AY})^2$ un maximum, ce qui donne l'équation

$$(1) \qquad \sum(\mathfrak{S}\text{AY}.d\mathfrak{S}\text{AY}) = 0.$$

De plus, de l'hypothèse que Y est un vecteur unitaire ou que $(\mathfrak{T}\text{Y})^2 = 1$, on tire (art. 602)

$$(2) \qquad \mathfrak{S}\text{Y}d\text{Y} = 0.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$\text{A}.\mathfrak{S}\text{AY} + \text{A}'.\mathfrak{S}\text{A}'\text{Y} + \ldots = \text{R},$$

l'équation (1) pourra se mettre sous la forme

$$(3) \qquad \mathfrak{S}\text{R}d\text{Y} = 0.$$

Les équations (2) et (3) expriment que les deux vecteurs Y et R doivent être ensemble perpendiculaires au vecteur $d\text{Y}$, dans toutes les positions, en nombre infini, que celui-ci peut occuper. Il faut donc que ces deux vecteurs soient parallèles, ce qui donne la condition $\text{R} = g\text{Y}$, ou

$$\sum \text{A}.\mathfrak{S}\text{AY} = g\text{Y},$$

g étant un nombre réel.

Si l'on représente par $\square\text{Y}$ le premier membre de cette équation, on voit que l'opération $\square$ ne doit pas changer la direction de Y, d'où l'on conclut (art. 587 et suiv.) que Y doit être une des trois directions correspondantes aux racines de l'équation $\varphi(g) = 0$. En outre, la fonction $\square$ étant conjuguée à elle-même, ces trois directions seront rectangulaires entre elles. Si, comme cela a lieu généralement, les trois valeurs de

g sont inégales, l'une d'elles correspondra à un maximum, une autre à un minimum, et la troisième ne correspondra ni à un maximum, ni à un minimum.

668. ***Deux des arêtes d'un angle trièdre trirectangle se mouvant chacune dans un plan donné, et le sommet étant fixe à l'origine des coordonnées, trouver le lieu de la troisième arête.***

Soient X, Y, Z les trois arêtes mobiles, A et B les axes des deux plans donnés. On aura les conditions

$$\mathfrak{S}\text{YZ} = 0, \quad \mathfrak{S}\text{ZX} = 0, \quad \mathfrak{S}\text{XY} = 0, \quad \mathfrak{S}\text{AY} = 0, \quad \mathfrak{S}\text{BZ} = 0,$$

entre lesquelles il s'agit d'éliminer Y et Z. Ces deux vecteurs dépendent de 6 paramètres, parmi lesquels 2 (les modules) doivent rester arbitraires; on n'aura donc que 4 paramètres à éliminer entre les 5 équations. On pourrait d'ailleurs compléter le nombre d'équations nécessaire pour l'élimination des 6 paramètres, en joignant aux équations précédentes ces deux-ci

$$\mathfrak{T}\text{Y} = g, \quad \mathfrak{T}\text{Z} = h,$$

g et h étant arbitraires.

Des équations $\mathfrak{S}\text{AY} = 0$, $\mathfrak{S}\text{XY} = 0$, on conclut que Y est perpendiculaire au plan (A, X), d'où

$$\text{Y} = t.\mathfrak{V}\text{AX}, \quad \text{et de même,} \quad \text{Z} = u.\mathfrak{V}\text{BX}.$$

Portant ces valeurs dans $\mathfrak{S}\text{YZ} = 0$, il vient

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{V}\text{AX}.\mathfrak{V}\text{BX}) = 0,$$

ou, à cause de $\mathfrak{V}\text{BX} = -\mathfrak{V}\text{XB}$,

$$0 = \mathfrak{S}(\mathfrak{V}\text{AX}.\mathfrak{V}\text{XB}) = \mathfrak{S}[(\text{AX} - \mathfrak{S}\text{AX})(\text{XB} - \mathfrak{S}\text{XB})],$$

et, en réduisant,

$$0 = \mathfrak{S}\text{AX}.\mathfrak{S}\text{BX} - \mathfrak{S}\text{AB}.\text{X}^2,$$

équation du second degré, qui est celle d'un cône dont les sections circulaires sont perpendiculaires à A et à B (art. 680).

CHAPITRE XII.

LA SPHÈRE ET LES SURFACES DU SECOND ORDRE.

§ Ier.

La sphère et le cône.

669. L'équation

$$(1) \qquad \mathfrak{T}\text{x} = \mathfrak{T}\text{A}, \qquad \text{ou} \qquad \text{x}^2 = \text{A}^2$$

représente une sphère de rayon $\mathfrak{T}$A, ayant son centre à l'origine.

On peut donner à cette équation diverses formes, qui correspondront à diverses propriétés de la sphère. De l'égalité

$$(\text{x}+\text{A})(\text{x}-\text{A}) = \text{x}^2-\text{A}^2+\text{Ax}-\text{xA} = \text{x}^2-\text{A}^2+2\mathfrak{V}\text{Ax},$$

il résulte, au lieu de l'équation (1), l'équation

$$\mathfrak{S}.(\text{x}+\text{A})(\text{x}-\text{A}) = 0,$$

qui exprime que les vecteurs x + A et x — A sont perpendiculaires entre eux, c'est-à-dire que la sphère est le lieu des sommets des angles droits dont les côtés passent par les extrémités A et — A d'un de ses diamètres.

On en tire encore

$$\mathfrak{T}(\text{x}+\text{A})(\text{x}-\text{A}) = 2\mathfrak{T}\mathfrak{V}\text{Ax}.$$

L'aire du rectangle compris entre des cordes x + A, x — A est donc le quadruple de l'aire du triangle compris entre les vecteurs A et x.

On a (art. 552)

$$\text{x} = (\text{x}+\text{A})^{-1}\text{A}(\text{x}+\text{A}),$$

ce qui fait voir que l'angle des vecteurs A et x est double de

l'angle des vecteurs A et X + A, lequel est égal à un angle inscrit, s'appuyant sur le même arc que l'angle au centre.

670. Si le centre de la sphère est en B, l'équation de la sphère sera alors

$$(2)\qquad \mathfrak{T}(X-B)=\mathfrak{T}A,\quad \text{ou}\quad X^2-2\mathfrak{S}BX=A^2-B^2.$$

Si $\mathfrak{T}B=\mathfrak{T}A$, le cercle passe par l'origine, et son équation est

$$X^2-2\mathfrak{S}BX=0,\quad \text{ou}\quad \mathfrak{S}X(X-2B)=0,\quad \text{ou}\quad \mathfrak{S}\frac{2B}{X}=1,$$

ce qui fait voir encore que l'angle inscrit dans le demi-grand cercle est droit.

671. Réciproquement, cherchons le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe A sur tous les plans passant par l'origine. Soit

$$\mathfrak{S}MX=0$$

l'équation d'un de ces plans; le vecteur abaissé de A sur ce plan sera (art. 660) $-M^{-1}\mathfrak{S}MA$, et le lieu de son pied sera

$$(3)\qquad X=A-M^{-1}\mathfrak{S}MA=M^{-1}\mathfrak{V}MA\ (^1).$$

On tire de l'équation (3), par l'élévation au carré,

$$(X-A)^2=M^{-2}(\mathfrak{S}MA)^2;$$

puis de la même équation, en opérant par $\mathfrak{S}A\times$,

$$\mathfrak{S}AX-A^2=-M^2(\mathfrak{S}MA)^2,$$

d'où, par addition,

$$X^2-\mathfrak{S}AX=0,\quad \text{ou}\quad \mathfrak{T}\left(X-\frac{A}{2}\right)=\mathfrak{T}\frac{A}{2},$$

ce qui représente une sphère [éq. (2)].

---

(1) Remarquons cet exemple d'une équation d'une surface exprimée au moyen des quaternions. Cette équation est *vectorielle*, et, par suite, équivalente à trois équations réelles. Mais elle renferme un vecteur indéterminé M, ou plutôt son verseur, le module disparaissant de cette expression, de manière que la présence de M équivaut seulement à deux indéterminées réelles. Les trois équations équivalent donc à une seule équation entre les coordonnées du point X.

672. *Trouver l'intersection de deux sphères*

$$\mathfrak{T}(\text{x}-\text{A}) = \mathfrak{T}\text{B}, \qquad \mathfrak{T}(\text{x}-\text{A}') = \mathfrak{T}\text{B}'.$$

En élevant au carré et soustrayant, il vient

$$2\mathfrak{S}(\text{A}'-\text{A})\text{x} = \text{A}'^2-\text{A}^2-(\text{B}'^2-\text{B}^2),$$

équation d'un plan perpendiculaire à la ligne des centres $\text{A}'-\text{A}$. Ce plan est celui de l'intersection des deux sphères, quand elles se coupent, et, dans tous les cas, c'est le plan radical des deux sphères.

673. En différentiant l'équation $\mathfrak{T}\text{x} = \mathfrak{T}\text{A}$, on a (art. 602)

$$\mathfrak{S}\text{x}d\text{x} = 0,$$

ce qui montre que la corde infiniment petite $d\text{x}$ a pour limite une perpendiculaire à l'extrémité du rayon.

Le lieu des positions-limites d'une sécante est donc un plan

$$\mathfrak{S}(\Xi-\text{x})\text{x} = 0,$$

ou, à cause de $\text{x}^2 = \text{A}^2$,

(4) $$\mathfrak{S}\Xi\text{x} = \text{A}^2.$$

674. *Lieu des projections d'un point de la sphère sur tous les plans tangents.*

Supposons que ce point soit le point A. La perpendiculaire $\Xi - \text{A}$ devra être parallèle au rayon x du point de contact, d'où

(5) $$\Xi = \text{A} + t\text{x}.$$

Il reste maintenant à éliminer x et t entre les équations (4), (5) et l'équation de la sphère $\text{x}^2 = \text{A}^2$,

En opérant par $\mathfrak{S}\Xi\times$ sur l'équation (5), il vient, en vertu de (4)

$$\Xi^2 = \mathfrak{S}\text{A}\Xi + t\mathfrak{S}\Xi\text{x} = \mathfrak{S}\text{A}\Xi + t\text{A}^2,$$

d'où

$$\text{x} = \frac{\Xi-\text{A}}{t} = \frac{\text{A}^2(\Xi-\text{A})}{\Xi^2-\mathfrak{S}\text{A}\Xi}.$$

En prenant les modules des deux membres, il vient, à cause de $X^2 = A^2$,

$$(\Xi^2 - \mathfrak{S} A \Xi)^2 = A^2 (\Xi - A)^2,$$

ce qui est l'équation cherchée. On peut la mettre sous la forme

$$[\mathfrak{S} . \Xi \mathfrak{U} (\Xi - A)]^2 = - A^2.$$

On tire de cette équation, en exprimant les vecteurs en coordonnées ordinaires, et posant $\Xi = \xi_1 I_1 + \xi_2 I_2 + \xi_3 I_3$, $A = a I_1$,

$$-A^2 = a^2 = \left[\mathfrak{S}(\xi_1 I_1 + \xi_2 I_2 + \xi_3 I_3) \frac{(\xi_1 - a) I_1 + \xi_2 I_2 + \xi_3 I_3}{\sqrt{(\xi_1 - a)^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}}\right]^2$$

$$= \frac{[\xi_1(\xi_1 - a) + \xi_2^2 + \xi_3^2]^2}{(\xi_1 - a)^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2},$$

ou, en posant $\xi_1 - a = r \cos p$, $\sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2} = r \sin p$,

$$r = a(1 - \cos p),$$

équation d'une cardioïde, qui engendre, par sa révolution autour de son axe de symétrie, le lieu cherché.

675. *Lieu des centres des sphères tangentes à deux droites non situées dans le même plan.*

En prenant pour origine le milieu de la perpendiculaire commune aux deux droites, leurs équations seront

$$Y = At + B, \qquad Y = A't' - B,$$

avec les conditions

$$\mathfrak{S} AB = 0, \qquad \mathfrak{S} A'B = 0.$$

L'équation d'une sphère de rayon r, ayant son centre en Y, est

$$\mathfrak{T}(X - Y) = r,$$

ou, en remplaçant Y par $At + B$, et ayant égard à la condition $\mathfrak{S} AB = 0$,

$$(X - B)^2 - 2t . \mathfrak{S} AX + A^2 t^2 = - r^2.$$

Pour que la sphère soit tangente à la première droite, il faut que cette équation ait deux racines égales en t, ce qui donne

$$(\mathfrak{S}\,\text{AX})^2 = \text{A}^2[(\text{X}-\text{B})^2 + r^2].$$

On trouvera de même, relativement à la seconde droite,

$$(\mathfrak{S}\,\text{A}'\text{X})^2 = \text{A}'^2[(\text{X}+\text{B})^2 + r^2).$$

Éliminant r^2 entre ces deux équations, il vient

$$\text{A}'^{-2}(\mathfrak{S}\,\text{A}'\text{X})^2 - \text{A}^{-2}(\mathfrak{S}\,\text{AX})^2 = (\text{X}+\text{B})^2 - (\text{X}-\text{B})^2 = 4\mathfrak{S}\,\text{BX}.$$

Si l'on prend des axes de coordonnées parallèles respectivement aux vecteurs A, A′, B, on obtient une équation de la forme

$$(x_1 + mx_2)^2 - (x_2 + mx_1)^1 = px_3;$$

le lieu cherché est donc un paraboloïde hyperbolique.

676. ***Équation d'un cône de révolution, dont le sommet est à l'origine.***

Soient X le vecteur d'un point du cône, A un vecteur unitaire pris sur l'axe, At la projection de X sur cet axe, α le demi-angle au sommet. On aura

$$\mathfrak{T}(\text{A}t) = t = \cos\alpha . \mathfrak{T}\text{X}.$$

La biradiale $\frac{\text{A}t}{\text{X}}$ a pour argument α et pour module $\cos\alpha$. On a donc

$$\mathfrak{S}\frac{\text{A}t}{\text{X}} = \mathfrak{S}\frac{\text{A}t.\text{X}}{\text{X}^2} = \mathfrak{S}[\cos\alpha(\cos\alpha + I\sin\alpha)] = \cos^2\alpha,$$

d'où $t.\mathfrak{S}\,\text{AX} = \text{X}^2\cos^2\alpha$, et, à cause de $t^2 = -\text{X}^2\cos^2\alpha$,

$$(\mathfrak{S}\,\text{AX})^2 = -\text{X}^2\cos^2\alpha,$$

équation du cône.

677. Si l'on transporte l'origine au point dont le vecteur est At, l'équation devient

$$[(\mathfrak{S}\,\text{A}(\text{X}-\text{A}t)]^2 = -(\text{X}+\text{A}t)^2\cos^2\alpha.$$

Coupons le cône par le plan $\mathfrak{S}\text{A}\text{x} = 0$, perpendiculaire à l'axe. Pour que le rayon de la section ainsi formée soit constant, il faut que $\mathfrak{T}\text{x} = r$ soit indépendant de t, et par suite que l'on ait

$$\frac{t^2}{r^2 + t^2} = \cos^2\alpha$$

pour toute valeur de t, et même pour t infini, ce qui exige que l'on ait $\cos^2\alpha = 1$. Alors le cône deviendra un cylindre de révolution, dont l'équation sera ce que devient à la limite l'équation

$$(\mathfrak{S}\text{A}\text{x})^2 - 2t.\mathfrak{S}\text{A}\text{x}.\sin^2\alpha + t^2\sin^2\alpha + \text{x}^2 = 0,$$

d'où, en remarquant que r^2 est la limite constante de $t^2\tan^2\alpha$ pour $t = \infty$ et $\alpha = 0$, et que $t\sin^2\alpha$ est infiniment petit, on tire

$$(\mathfrak{S}\text{A}\text{x})^2 + \text{x}^2 + r^2 = 0,$$

équation du cylindre de révolution.

C'est ce que l'on peut vérifier, en égalant à r la distance constante $\mathfrak{T}(\mathfrak{V}\text{A}\text{x})$ du point x à l'axe (art. 652).

678. *Équation d'une surface de révolution.*

Soit At l'axe de révolution passant pas l'origine. La biradiale $\frac{\text{x}}{\text{A}} = \mathfrak{S}\frac{\text{x}}{\text{A}} + \mathfrak{V}\frac{\text{x}}{\text{A}}$ a pour partie réelle le rapport de la composante de x parallèle à A à la longueur constante de A, et le module de son vecteur $\mathfrak{T}\left(\mathfrak{V}\frac{\text{x}}{\text{A}}\right)$ est le rapport de la distance de x à l'axe à cette même longueur de A. L'équation de la surface de révolution sera une relation quelconque entre ces deux quantités,

$$\text{F}\left[\mathfrak{S}\frac{\text{x}}{\text{A}},\ \mathfrak{T}\left(\mathfrak{V}\frac{\text{x}}{\text{A}}\right)\right] = 0,$$

ou, si l'on veut,

$$\text{F}[\mathfrak{S}\text{A}\text{x},\ \mathfrak{T}(\mathfrak{V}\text{A}\text{x})] = 0,$$

l'équation de la courbe méridienne dans son plan étant, en supposant $\mathfrak{T}\text{A} = 1$,

$$\text{F}(x, y) = 0.$$

Si l'on suppose, par exemple, que

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

soit l'équation de la courbe méridienne, celle de l'ellipsoïde de révolution sera

$$\frac{(\mathfrak{S}\,\mathrm{A}\,\mathrm{X})^2}{a^2}+\frac{(\mathfrak{T}\mathfrak{V}\,\mathrm{A}\,\mathrm{X})^2}{b^2}=1,$$

ou, en faisant $\mathrm{A}a=\mathrm{A}_1$, $\mathrm{A}b=\mathrm{A}_2$,

$$\left(\mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{A}_1}\right)^2+\left(\mathfrak{T}\mathfrak{V}\,\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{A}_2}\right)^2=1.$$

679. *Équation d'un cône du second ordre.*

Les équations

$$\mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{A}}=1,\qquad \mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{X}}=1$$

représentant (art. 657 et 670) la première un plan perpendiculaire au vecteur A, la seconde une sphère de diamètre B, leur ensemble représentera le cercle qui est l'intersection de ces surfaces. Si l'on multiplie chaque vecteur X de ce cercle par une indéterminée r, on aura alors

$$\mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{A}}=r,\qquad \mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{X}}=\frac{1}{r},$$

et le lieu des extrémités de tous les vecteurs sera un cône ayant pour sommet l'origine et s'appuyant sur le cercle en question. Son équation, qui s'obtiendra en éliminant r, sera

$$(1)\qquad \mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{A}}\,.\,\mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{X}}=1.$$

Pour que ce cône soit réel, il faut que le plan coupe la sphère, et que par suite on ait $\mathfrak{T}\mathrm{A}<\frac{1}{2}\,\mathfrak{T}\mathrm{B}\,(1+\cos \mathrm{A}O\mathrm{B})$.

On peut encore supposer que A et B sont des vecteurs unitaires. En remplaçant alors A par αA, B par βB, l'équation devient

$$(2)\qquad \mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{A}}\,.\,\mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{X}}=\frac{\alpha}{\beta}=\gamma,$$

et la condition de réalité devient $\gamma<\frac{1}{2}(1+\cos \mathrm{A}O\mathrm{B})$.

680. L'équation (2) peut se mettre sous la forme

$$\mathfrak{S}\,\mathrm{AX}.\mathfrak{S}\,\mathrm{XB} = \gamma \mathrm{A}^2 \mathrm{X}^2 = -\gamma \mathrm{X}^2,$$

et son premier membre ne change pas lorsqu'on échange entre elles les quantités A et B. Donc l'équation du même cône peut encore se mettre sous la forme

$$\mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{B}}.\mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{X}} = \gamma,$$

et par suite, outre la section circulaire représentée par les équations

$$\mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{A}} = \gamma, \qquad \mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{X}} = 1,$$

il contiendra encore une autre section circulaire, représentée par les équations

$$\mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{X}} = 1, \qquad \mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{B}} = \gamma,$$

On obtient ainsi les directions des deux systèmes de sections circulaires, dont les unes ont leurs plans perpendiculaires à A, les autres à B.

§ II.

Équation générale des surfaces du second ordre. Étude des surfaces à centre.

681. L'équation réelle générale qui donne le vecteur x d'une surface du second ordre doit évidemment contenir : 1° un terme indépendant de x ; 2° des termes du premier degré en x, réductibles à la forme $\mathfrak{S} A\mathrm{x}B$; 3° des termes du second degré en x, de la forme $\mathfrak{S} A\mathrm{x}B\mathrm{x}C$, A, B, C, ... désignant des quaternions constants.

Le terme $\mathfrak{S} A\mathrm{x}B$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathfrak{S}(\mathrm{x}\,\mathfrak{V} BA),$$

ou sous la forme

$$\mathfrak{S}[(a_0+a_i)\mathrm{x}(b_0+b_i)] = \mathfrak{S}(a_0\mathrm{x}\,b_i)+\mathfrak{S}(a_i\mathrm{x}\,b_0)+\mathfrak{S}(a_i\mathrm{x}\,b_i),$$

dont chaque terme peut se ramener à la forme $\mathfrak{S}\mathrm{AX}$, A étant un vecteur connu.

De même, on a

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(A\mathrm{x}B\mathrm{x}C) &= \mathfrak{S}(CA\mathrm{x}B\mathrm{x}) = \mathfrak{S}(A'\mathrm{x}B\mathrm{x}) = \mathfrak{S}[(a'_0+a'_i)\mathrm{x}(b_0+b_i)\mathrm{x}]\\ &= a'_0 b_0 \mathrm{x}^2 + \mathfrak{S}(a'_i\mathrm{x}\,b_i\mathrm{x}) = a'_0 b_0 \mathrm{x}_0 + \mathfrak{S}a'_i\mathrm{x}.\mathfrak{S}b_i\mathrm{x} + \mathfrak{S}(\mathfrak{V}a'_i\mathrm{x}.\mathfrak{V}b_i\mathrm{x})\\ &= a'_0 b_0 \mathrm{x}^2 + \mathfrak{S}a'_i\mathrm{x}.\mathfrak{S}b_i\mathrm{x} - \mathfrak{S}(a'_i\mathrm{x}.\mathfrak{V}\mathrm{x}\,b_i)\\ &= a'_0 b_0 \mathrm{x}^2 + \mathfrak{S}a'_i\mathrm{x}.\mathfrak{S}b_i\mathrm{x} - \mathfrak{S}(a'_i\mathrm{x}^2 b_i) + \mathfrak{S}a'_i\mathrm{x}.\mathfrak{S}b_i\mathrm{x}\\ &= (a'_0 b_0 - \mathfrak{S}a'_i b_i)\mathrm{x}^2 + 2\mathfrak{S}a'_i\mathrm{x}.\mathfrak{S}b_i\mathrm{x}.\end{aligned}$$

Donc ce terme se décompose en termes de la forme

$$\mathfrak{S}\mathrm{AX}.\mathfrak{S}\mathrm{BX}, \qquad (\mathfrak{S}\mathrm{AX})^2,$$

dont le dernier est un cas particulier du précédent.

Par conséquent, en introduisant, pour plus de commodité, des coefficients numériques 2, on peut écrire l'équation réelle générale du second degré sous la forme

$$(1) \qquad 2\sum\mathfrak{S}\mathrm{AX}.\mathfrak{S}\mathrm{BX} + \alpha\mathrm{X}^2 + 2\mathfrak{S}\mathrm{CX} = \beta,$$

α, β étant des constantes réelles, A, B, C des vecteurs constants.

682. Transportons l'origine en R, et changeons X en $\mathrm{X}+\mathrm{R}$. Il viendra

$$\begin{aligned}2\sum\{\mathfrak{S}\mathrm{AX}.\mathfrak{S}\mathrm{BX} + \mathfrak{S}\mathrm{AR}.\mathfrak{S}\mathrm{BX} + \mathfrak{S}\mathrm{AX}.\mathfrak{S}\mathrm{BR} + \mathfrak{S}\mathrm{AR}.\mathfrak{S}\mathrm{BR}\}\\ + \alpha\mathrm{X}^2 + 2\alpha.\mathfrak{S}\mathrm{RX} + \alpha\mathrm{R}^2 + 2\mathfrak{S}\mathrm{CX} + 2\mathfrak{S}\mathrm{CR} = \beta,\end{aligned}$$

d'où les termes du premier degré en X disparaîtront, si l'on pose

$$(2) \qquad \sum(\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BR} + \mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AR}) + \alpha\mathrm{R} + \mathrm{C} = 0,$$

comme on le voit en opérant sur cette équation par $\mathfrak{S}\mathrm{X}\times$. On obtient ainsi une équation du premier degré par rapport au

vecteur R, telle que nous en avons résolu dans le Chapitre VII. La valeur de R donnera la position du centre (¹).

Si l'on pose maintenant, en substituant pour R sa valeur,

$$\gamma = \beta - 2\sum \mathfrak{S}\mathrm{AR}.\mathfrak{S}\mathrm{BR} - 2\mathfrak{S}\mathrm{CR} - \alpha\mathrm{R}^2,$$

l'équation (1) deviendra

$$(3) \qquad 2\sum \mathfrak{S}\mathrm{AX}.\mathfrak{S}\mathrm{BX} + \alpha\mathrm{X}^2 = \gamma,$$

équation générale des surfaces à centre du second degré.

Si $\gamma = 0$, l'équation représentera un cône. Nous en avons vu un cas particulier dans l'art. 679.

Si γ est différent de zéro, la surface sera un ellipsoïde ou l'un des deux hyperboloïdes. Nous considérerons seulement le cas de l'ellipsoïde.

En divisant par γ, ce qui altère seulement les modules des constantes, l'équation prendra la forme

$$(4) \qquad 2\sum \mathfrak{S}\mathrm{AX}.\mathfrak{S}\mathrm{BX} + g\mathrm{X}^2 = 1.$$

683. En différentiant, il vient

$$\sum (\mathfrak{S}\mathrm{A}d\mathrm{X}.\mathfrak{S}\mathrm{BX} + \mathfrak{S}\mathrm{AX}.\mathfrak{S}\mathrm{B}d\mathrm{X}) + g\mathfrak{S}\mathrm{X}d\mathrm{X} = 0,$$

ou

$$(5) \qquad \mathfrak{S}\Big\{d\mathrm{X}\Big[\sum (\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BX} + \mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AX}) + g\mathrm{X}\Big]\Big\} = 0,$$

et par suite l'équation du plan tangent est, en exprimant que le vecteur $\Xi - \mathrm{X}$ est parallèle à $d\mathrm{X}$,

$$\mathfrak{S}\Big\{(\Xi - \mathrm{X})\Big[\sum (\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BX} + \mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AX}) + g\mathrm{X}\Big]\Big\} = 0,$$

ou, en ayant égard à l'équation (4),

$$(6) \qquad \mathfrak{S}\Big\{\Xi\Big[\sum (\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BX} + \mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AX}) + g\mathrm{X}\Big]\Big\} = 1.$$

(¹) Nous laisserons de côté les cas où la surface n'est pas douée d'*un centre unique*.

Si donc on pose

$$\text{N} = \sum (\text{A}.\mathfrak{S}\,\text{BX} + \text{B}.\mathfrak{S}\,\text{AX}) + g\,\text{X},$$

l'équation du plan tangent sera

$$\mathfrak{S}\,\text{N}\Xi = 1,$$

celle de la surface elle-même pouvant s'écrire sous la forme

$$\mathfrak{S}\,\text{NX} = 1.$$

D'après l'équation (5), le vecteur N étant perpendiculaire à $d\text{X}$ et par suite au plan tangent, le vecteur N^{-1}, perpendiculaire également à ce plan, et satisfaisant à son équation (6), est évidemment le vecteur perpendiculaire abaissé de l'origine sur ce plan.

684. Si nous faisons usage de la notation déjà employée dans le Chapitre VII pour représenter une fonction linéaire et vectorielle, la valeur de N pourra se mettre sous la forme

$$\text{N} = \square\,\text{X}.$$

Alors l'équation de la surface et celle du plan tangent s'écriront d'une manière abrégée

$$(1) \qquad \mathfrak{S}\,\text{X}\square\text{X} = 1,$$

$$(2) \qquad \mathfrak{S}\,\Xi\square\text{X} = 1;$$

En différentiant l'équation (1), et remarquant que $d\square\text{X} = \square d\text{X}$, il vient

$$\mathfrak{S}\,d\text{X}\square\text{X} + \mathfrak{S}\,\text{X}\square d\text{X} = \text{c}.$$

En remarquant maintenant que, dans le cas actuel, la fonction $\square$ est conjuguée à elle-même (art. 590) [1], on voit que les deux termes de l'équation précédente sont identiquement égaux; donc l'équation se réduit à

$$(3) \qquad \mathfrak{S}\,d\text{X}\square\text{X} = 0,$$

[1] On vérifie, en effet, facilement que l'on a, quels que soient Ξ et X,

$$\mathfrak{S}\,\Xi\square\text{X} = \mathfrak{S}\,\text{X}\square\Xi.$$

et l'on est conduit, comme dans l'article précédent, mais par un calcul plus simple, à l'équation du plan tangent

$$\mathfrak{S}(\Xi-\mathrm{x})\square\mathrm{x}=0,$$

laquelle, en vertu de (1), se réduit à (2).

Si le plan tangent passe au point p, on aura, pour $\Xi=\mathrm{p}$,

$$\mathfrak{S}\mathrm{p}\square\mathrm{x}=1,$$

ou, la fonction $\square$ étant conjuguée à elle-même,

(4) $$\mathfrak{S}\mathrm{x}\square\mathrm{p}=1,$$

équation du plan de contact des plans tangents menés par p, ou du plan polaire du point p.

685. L'équation

(5) $$\mathfrak{S}\mathrm{x}\square\mathrm{x}-1+\lambda(\mathfrak{S}\mathrm{x}\square\mathrm{p}-1)^2=0$$

représente une surface du second degré passant par l'intersection de la surface (1) avec le plan (4). On en tire, en effet,

$$2\mathfrak{S}\square\mathrm{x}d\mathrm{x}+2\lambda(\mathfrak{S}\mathrm{x}\square\mathrm{p}-1)\mathfrak{S}\square\mathrm{p}d\mathrm{x}=0,$$

équation qui, pour les points appartenant au plan (4), se réduit à l'équation (3), d'où l'on conclut que la surface (5) est *tangente* à la surface (1) le long de la courbe d'intersection avec le plan (4).

En écrivant que la surface (5) passe par le point p, on a, pour déterminer λ, l'équation

$$\mathfrak{S}\mathrm{p}\square\mathrm{p}-1+\lambda(\mathfrak{S}\mathrm{p}\square\mathrm{p}-1)^2=0,$$

et l'équation (5) devient alors

(6) $$(\mathfrak{S}\mathrm{x}\square\mathrm{x}-1)(\mathfrak{S}\mathrm{p}\square\mathrm{p}-1)-(\mathfrak{S}\mathrm{x}\square\mathrm{p}-1)^2=0.$$

On peut voir aisément que cette surface est un cône. Transportons, en effet, l'origine en p, en changeant x en $\mathrm{x}+\mathrm{p}$. On

a alors, à cause de la propriété distributive de la fonction $\square$,

$$(\mathfrak{S}\mathrm{x}\square\mathrm{x}+2\mathfrak{S}\mathrm{x}\square\mathrm{p}+\mathfrak{S}\mathrm{p}\square\mathrm{p}-1)(\mathfrak{S}\mathrm{p}\square\mathrm{p}-1) -(\mathfrak{S}\mathrm{x}\square\mathrm{p}+\mathfrak{S}\mathrm{p}\square\mathrm{p}-1)^2=0,$$

ou

$$\mathfrak{S}\mathrm{x}\square\mathrm{x}.(\mathfrak{S}\mathrm{p}\square\mathrm{p}-1)-(\mathfrak{S}\mathrm{x}\square\mathrm{p})^2=0,$$

équation homogène en $\mathfrak{T}\mathrm{x}^2$, et par conséquent représentant un cône. On voit d'ailleurs qu'elle est de la forme (3) (art. 682) pour $\gamma=0$. Donc l'équation (6) est celle du cône circonscrit à la surface (1) et ayant pour sommet le point p.

Si l'on remplace, dans (6), p par $\alpha\mathrm{p}$, puis que l'on fasse α infini, on exprimera que le sommet du cône s'en va à l'infini sur une droite parallèle à p. En divisant l'équation par α, il ne restera plus que les termes du degré le plus élevé en p. On aura ainsi, pour l'équation du cylindre circonscrit à la surface (1) et parallèle au vecteur p,

$$(\mathfrak{S}\mathrm{x}\square\mathrm{x}-1).\mathfrak{S}\mathrm{p}\square\mathrm{p}-(\mathfrak{S}\mathrm{x}\square\mathrm{p})^2=0.$$

686. *Lieu des milieux d'un système de cordes parallèles.*

Soient des cordes parallèles au vecteur L, et Ξ le vecteur du milieu d'une de ces cordes. Les vecteurs des points de rencontre de la corde avec la surface seront $\Xi+\mathrm{L}t$ et $\Xi-\mathrm{L}t$. En substituant ces vecteurs dans l'équation de la surface, on a

$$\mathfrak{S}.(\Xi\pm\mathrm{L}t)\square(\Xi\pm\mathrm{L}t)=1,$$

d'où l'on tire, en vertu des propriétés de la fonction $\square$

$$\mathfrak{S}\Xi\square\Xi+t^2\mathfrak{S}\mathrm{L}\square\mathrm{L}=1,$$

avec la condition

$$\mathfrak{S}\Xi\square\mathrm{L}=0, \tag{7}$$

qui est l'équation du lieu cherché. On voit que ce lieu est un plan perpendiculaire au vecteur $\square\mathrm{L}$, et par suite parallèle au plan tangent au point de rencontre du vecteur L avec la surface [art. 684, (2)].

L'équation (7) pouvant s'écrire sous la forme

$$\mathfrak{S}\mathrm{L}\square\Xi = 0,$$

on voit que le plan diamétral des cordes parallèles à Ξ est parallèle au plan tangent à l'extrémité de Ξ. Les deux vecteurs L et Ξ sont donc tels que chacun d'eux appartient au plan diamétral des cordes parallèles à l'autre.

Soient donc L et M deux vecteurs liés par la relation

(8) $$\mathfrak{S}\mathrm{L}\square\mathrm{M} = \mathfrak{S}\mathrm{M}\square\mathrm{L} = 0,$$

et soit N l'intersection des plans diamétraux conjugués de ces vecteurs,

$$\mathfrak{S}\Xi\square\mathrm{L} = 0, \quad \mathfrak{S}\Xi\square\mathrm{M} = 0,$$

d'où $\mathrm{N} = \mathfrak{V}(\square\mathrm{L}\,.\,\square\mathrm{M})$. Le plan diamétral conjugué de N devra contenir à la fois les vecteurs L et M. On devra donc joindre aux relations (8) les suivantes

(8) $$\begin{cases} \mathfrak{S}\mathrm{M}\square\mathrm{N} = \mathfrak{S}\mathrm{N}\square\mathrm{M} = 0, \\ \mathfrak{S}\mathrm{N}\square\mathrm{L} = \mathfrak{S}\mathrm{L}\square\mathrm{N} = 0. \end{cases}$$

687. Le vecteur X pouvant être décomposé suivant trois directions quelconques non coplanaires, on pourra poser

$$\mathrm{X} = \mathrm{L}x_1 + \mathrm{M}x_2 + \mathrm{N}x_3,$$

L, M, N étant trois vecteurs *conjugués*, satisfaisant aux relations (8). Si l'on pose, de plus,

$$\mathfrak{S}\mathrm{L}\square\mathrm{L} = 1, \quad \mathfrak{S}\mathrm{M}\square\mathrm{M} = 1, \quad \mathfrak{S}\mathrm{N}\square\mathrm{N} = 1,$$

les extrémités de ces vecteurs seront sur la surface. Substituant la valeur précédente de X dans l'équation $\mathfrak{S}\mathrm{X}\square\mathrm{X} = 1$ de la surface, et ayant égard aux équations précédentes, ainsi qu'aux propriétés de la fonction $\square$, il vient

$$\begin{aligned} 1 = \mathfrak{S}\mathrm{X}\square\mathrm{X} &= \mathfrak{S}[(\mathrm{L}x_1 + \mathrm{M}x_2 + \mathrm{N}x_3)\square(\mathrm{L}x_1 + \mathrm{M}x_2 + \mathrm{N}x_3)] \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \end{aligned}$$

Or x_1 est le rapport de la composante de X parallèle à L à la

longueur même de L, et de même pour les autres. Si donc on désigne par l, m, n les longueurs des trois vecteurs conjugués, l'équation de l'ellipsoïde, rapportée à ces trois vecteurs pris pour axes, sera

$$\frac{x_1^2}{l^2}+\frac{x_2^2}{m^2}+\frac{x_3^2}{n^2}=1.$$

688. Considérons la fonction linéaire conjuguée à elle-même

$$\square x = \alpha_1 A_1 \mathfrak{S} A_1 x + \alpha_2 A_2 \mathfrak{S} A_2 x + \alpha_3 A_3 \mathfrak{S} A_3 x,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ étant des coefficients réels, et A_1, A_2, A_3 trois vecteurs unitaires rectangulaires entre eux. Nous aurons

$$\square^2 x = -\alpha_1^2 A_1 \mathfrak{S} A_1 x - \alpha_2^2 A_2 \mathfrak{S} A_2 x - \alpha_3^2 A_3 \mathfrak{S} A_3 x.$$

On conclut de là que, si l'on a une fonction linéaire conjuguée à elle-même,

$$\square x = \alpha_1 A_1 \mathfrak{S} A \ x + \alpha_2 A_2 \mathfrak{S} A_2 x + \alpha_3 A_3 \mathfrak{S} A_3 x,$$

où les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ soient positifs, et les vecteurs A_1, A_2, A_3 orthogonaux entre eux, la fonction linéaire conjuguée à elle-même

$$\Delta x = \sqrt{\alpha_1} A_1 \mathfrak{S} A_1 x + \sqrt{\alpha_2} A_2 \mathfrak{S} A_2 x + \sqrt{\alpha_3} A_3 \mathfrak{S} A_3 x$$

sera telle que l'on aura $\Delta^2 x = -\square x$, de sorte que les signes d'opération Δ et $\square$ seront liés par la relation

$$\Delta^2 = -\square, \qquad \text{ou} \qquad \Delta = \sqrt{-\square}.$$

Ainsi, l'équation d'un ellipsoïde rapporté à ses axes principaux (1)

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=1$$

peut se mettre sous la forme

$$\mathfrak{S} x \square x = \frac{(\mathfrak{S} I_1 x)^2}{a_1^2}+\frac{(\mathfrak{S} I_2 x)^2}{a_2^2}+\frac{(\mathfrak{S} I_3 x)^2}{a_3^2}=1,$$

(1) Voir les articles 587, 590, 592.

où

$$\square x = \mathrm{I}_1 \frac{\mathfrak{S}\,\mathrm{I}_1 x}{a_1^2} + \mathrm{I}_2 \frac{\mathfrak{S}\,\mathrm{I}_2 x}{a_2^2} + \mathrm{I}_3 \frac{\mathfrak{S}\,\mathrm{I}_3 x}{a_3^2}.$$

Si l'on fait

$$\Delta x = -\mathrm{I}_1 \frac{\mathfrak{S}\,\mathrm{I}_1 x}{a_1} - \mathrm{I}_2 \frac{\mathfrak{S}\,\mathrm{I}_2 x}{a_2} - \mathrm{I}_3 \frac{\mathfrak{S}\,\mathrm{I}_3 x}{a_3},$$

l'équation de la surface pourra s'écrire

$$\mathfrak{S} x \Delta^2 x = -1, \qquad \text{ou} \qquad \mathfrak{S} \Delta x \Delta x = -1,$$

ou enfin

$$\mathfrak{T} \Delta x = 1.$$

Comparant cette équation à celle de la sphère

$$\mathfrak{T} x = 1,$$

on voit que la sphère se change en ellipsoïde ou *vice versa*, lorsqu'on fait subir aux vecteurs la transformation linéaire Δ ou son inverse.

Ainsi, l'équation d'un ellipsoïde peut être mise sous la forme de l'équation d'une sphère, dans laquelle le vecteur x est remplacé par le vecteur transformé Δx.

Les conditions (8), qui expriment que trois vecteurs L, M, N sont conjugués, peuvent s'écrire, à cause de $\mathfrak{S}\mathrm{M}\Delta^2\mathrm{N} = \mathfrak{S}\Delta\mathrm{M}\Delta\mathrm{N}$, sous la forme

$$\mathfrak{S}\Delta\mathrm{M}\Delta\mathrm{N} = 0, \quad \mathfrak{S}\Delta\mathrm{N}\Delta\mathrm{L} = 0, \quad \mathfrak{S}\Delta\mathrm{L}\Delta\mathrm{M} = 0.$$

Les trois vecteurs $\Delta\mathrm{L}$, $\Delta\mathrm{M}$, $\Delta\mathrm{N}$, dans lesquels se transforment trois vecteurs conjugués, lorsque l'ellipsoïde se change en une sphère par la transformation Δ, forment donc un système de trois rayons de la sphère perpendiculaires entre eux.

689. La fonction $\square$ étant définie par l'équation

$$\square x = \sum\nolimits_n \frac{\mathrm{I}_n \mathfrak{S}\,\mathrm{I}_n x}{a_n^2}, \quad (n = 1, 2, 3)$$

le vecteur $\mathrm{x} = \sum \mathrm{I}x$ pouvant se mettre sous la forme

$$\mathrm{x} = -\sum \mathrm{I}_n \mathfrak{S} \mathrm{I}_n \mathrm{x},$$

on en conclut

$$\square \mathrm{I}_n = -\frac{\mathrm{I}_n}{a_n^2},$$

d'où

$$\square^{-1} \mathrm{I}_n = -a_n^2 \mathrm{I}_n.$$

et par suite

$$\square^{-1} \mathrm{x} = \sum a_n^2 \mathrm{I}_n . \mathfrak{S} \mathrm{I}_n \mathrm{x}.$$

De même, pour la fonction Δ,

$$\Delta^{-1} \mathrm{x} = -\sum a_n \mathrm{I}_n . \mathfrak{S} \mathrm{I}_n \mathrm{x}.$$

Donc

$$\mathrm{x} = \square^{-1} \square \mathrm{x} = \sum a_n^2 \mathrm{I}_n . \mathfrak{S} \mathrm{I}_n \square \mathrm{x} = \Delta^{-1} \Delta \mathrm{x} = -\sum a_n \mathrm{I}_n . \mathfrak{S} \mathrm{I}_n \Delta \mathrm{x}.$$

Si $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3$ sont trois vecteurs unitaires rectangulaires quelconques, on a

$$\mathfrak{S} \mathrm{K}_1 \square \mathrm{K}_1 = \sum_n \frac{(\mathfrak{S} \mathrm{I}_n \mathrm{K}_1)^2}{a_n^2}, \text{ etc.},$$

d'où, à cause de

$$\sum_n (\mathfrak{S} \mathrm{I}_n \mathrm{K}_n)^2 = -1,$$

on tire

(1) $$\sum \mathrm{K}_n \square \mathrm{K}_n = \sum \frac{1}{a_n^2}.$$

On a encore

$$\mathfrak{S}(\square \mathrm{K}_1 \square \mathrm{K}_2 \square \mathrm{K}_3) = \mathfrak{S}\left[\sum_n \frac{\mathrm{I}_n \mathfrak{S} \mathrm{I}_n \mathrm{K}_1}{a_n^2} . \sum_n \frac{\mathrm{I}_n \mathfrak{S} \mathrm{I}_n \mathrm{K}_2}{a_n^2} . \sum_n \frac{\mathrm{I}_n \mathfrak{S} \mathrm{I}_n \mathrm{K}_3}{a_n^2}\right]$$

$$= -\left| \frac{\mathfrak{S} \mathrm{I}_1 \mathrm{K}_1}{a_1^2}, \frac{\mathfrak{S} \mathrm{I}_2 \mathrm{K}_2}{a_2^2}, \frac{\mathfrak{S} \mathrm{I}_3 \mathrm{K}_3}{a_3^2} \right| = -\frac{1}{a_1^2 a_2^2 a_3^2} \left| \mathfrak{S} \mathrm{I}_1 \mathrm{K}_1, \mathfrak{S} \mathrm{I}_2 \mathrm{K}_2, \mathfrak{S} \mathrm{I}_3 \mathrm{K}_3 \right|$$

$$= -\frac{\mathrm{K}_1 \mathrm{K}_2 \mathrm{K}_3}{a_1^2 a_2^2 a_3^2} = \pm \frac{1}{a_1^2 a_2^2 a_3^2}.$$

690. *Lieu des pôles des plans équidistants du centre de l'ellipsoïde.*

Soit Ξ le vecteur d'un point du lieu. L'équation de son plan polaire sera

$$\mathfrak{S} \mathrm{x} \square \Xi = 1,$$

et la distance de l'origine à ce plan aura pour expression (art. 660),

$$\frac{1}{\mathfrak{T}\square\Xi}.$$

Donc l'équation cherchée sera, par une transformation analogue à celle du numéro précédent,

$$\mathfrak{T}\square\Xi = c, \quad \text{ou} \quad \mathfrak{S}\square\Xi\square\Xi = \mathfrak{S}\Xi\square^2\Xi = -c^2,$$

ce qui représente un ellipsoïde concentrique au premier, e dont l'équation en coordonnées cartésiennes sera

$$\frac{x_1^2}{a_1^4} + \frac{x_2^2}{a_2^4} + \frac{x_3^2}{a_3^4} = c^2.$$

691. ***Lieu des points d'intersection d'un système rectangulaire de trois tangentes à l'ellipsoïde.***

Ξ étant le vecteur d'un point du lieu, l'une des tangentes pourra se mettre sous la forme $\Xi + t\upsilon$, υ étant un vecteur unitaire. Les deux points d'intersection de ce vecteur avec l'ellipsoïde seront donnés par l'équation

$$1 = \mathfrak{S}.(\Xi + t\upsilon)\square(\Xi + t\upsilon) = t^2\mathfrak{S}\upsilon\square\upsilon + 2t.\mathfrak{S}\Xi\square\upsilon + \mathfrak{S}\Xi\square\Xi,$$

et la condition pour que ces deux points d'intersection se confondent, ou pour que cette équation donne pour t deux valeurs égales, est que l'on ait

$$(\mathfrak{S}\Xi\square\upsilon)^2 = \mathfrak{S}\upsilon\square\upsilon.(\mathfrak{S}\Xi\square\Xi - 1).$$

En désignant par $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3$ les vecteurs unitaires υ relatifs aux trois tangentes, et additionnant les trois équations ainsi obtenues, on aura

$$\sum_n (\Xi\square\upsilon_n)^2 = \mathfrak{S}(\Xi\square\Xi - 1).\sum_n \mathfrak{S}\upsilon_n\square\upsilon_n, \qquad (n = 1, 2, 3),$$

ou [art. 689, (1)], à cause de $\mathfrak{S}\Xi\square\upsilon_n = \mathfrak{S}\upsilon_n\square\Xi$ et de $\sum\upsilon_n^2 = -1$,

$$-(\square\Xi)^2 = (\mathfrak{S}\Xi\square\Xi - 1).\sum\frac{1}{a_n^2}.$$

ou enfin, à cause de $(\square\Xi)^2 = \mathfrak{S}\square\Xi\square\Xi = \mathfrak{S}\Xi\square^2\Xi$,

$$\mathfrak{S}\Xi\left[\left(\sum\frac{1}{a_n^2}\right)\square + \square^2\right]\Xi = \sum\frac{1}{a_n^2},$$

équation d'un ellipsoïde concentrique au proposé.

692. Supposons que d'un point donné x d'un ellipsoïde on mène trois vecteurs rectangulaires, rencontrant de nouveau l'ellipsoïde aux points $x + t_1 u_1$, $x + t_2 u_2$, $x + t_3 u_3$. On aura à la fois

$$\mathfrak{S}x\square x = 0, \qquad \mathfrak{S}(x + tu)\square(x + tu) = 0,$$

d'où

$$t = -\frac{2\mathfrak{S}u\square x}{\mathfrak{S}u\square u_n}.$$

Les vecteurs des seconds points de rencontre sont donc

$$x - t_n u_n = x - 2u_n\frac{\mathfrak{S}u_n\square x}{\mathfrak{S}u_n\square u}, \qquad (n = 1, 2, 3).$$

L'équation du plan passant par ces trois points est (art. 661)

$$\begin{aligned}0 &= \mathfrak{S}(\Xi - x - t_1 u_1)(t_2 u_2 - t_1 u_1)(t_3 u_3 - t_1 u_1)\\ &= \mathfrak{S}(\Xi - x)(t_2 t_3 u_2 u_3 + t_3 t_1 u_3 u_1 + t_1 t_2 u_1 u_2) + t_1 t_2 t_3 \mathfrak{S}u_1 u_2 u_3,\end{aligned}$$

ou, u_1, u_2, u_3 étant des vecteurs unitaires rectangulaires,

$$0 = \mathfrak{S}(\Xi - x)\left(\frac{u_1}{t_1} + \frac{u_2}{t_2} + \frac{u_3}{t_3}\right) + 1,$$

ou

$$0 = \mathfrak{S}(\Xi - x)\left(\frac{u_1\mathfrak{S}u_1\square u_1}{\mathfrak{S}u_1\square x} + \frac{u_2\mathfrak{S}u_2\square u_2}{\mathfrak{S}u_2\square x} + \frac{u_3\mathfrak{S}u_3\square u_3}{\mathfrak{S}u_3\square x}\right) - 2 = 0.$$

Essayons maintenant de satisfaire à cette équation par une valeur de la forme

$$\Xi - x = \alpha.\sum u_n.\mathfrak{S}u_n\square x, \qquad (n = 1, 2, 3).$$

On aura

$$\mathfrak{S}(\Xi - x)\frac{u_1\mathfrak{S}u_1\square u_1}{\mathfrak{S}u_1\square x} = -\alpha\mathfrak{S}u_1\square u_1,$$

et de même pour les autres, d'où l'on tire

$$\alpha = -\frac{1}{\Sigma \mathrm{U}_n \square \mathrm{U}_n},$$

et par suite l'équation est satisfaite par le vecteur

$$\Xi = \mathrm{X} - 2\frac{\Sigma(\mathrm{U}_n . \mathfrak{S} \mathrm{U}_n \square \mathrm{X})}{\Sigma(\mathfrak{S} \mathrm{U}_n \square \mathrm{U}_n)}.$$

Or, si l'on remplace, dans la seconde formule (16) de l'art. 573, L, M, N par $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \mathrm{U}_3$, on a, à cause de $\mathrm{U}_2\mathrm{U}_3 = -\mathrm{U}_1$, etc.,

$$m_2 = -\sum \mathrm{U}_n \square \mathrm{U}_n,$$

quantité réelle indépendante de $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \mathrm{U}_3$. Ensuite $\mathfrak{S}\mathrm{U}_1 \square \mathrm{X}$, $\mathfrak{S}\mathrm{U}_2 \square \mathrm{X}$, $\mathfrak{S}\mathrm{U}_3 \square \mathrm{X}$ étant les composantes du vecteur $\square \mathrm{X}$ suivant les directions rectangulaires de $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \mathrm{U}_3$, on aura

$$\sum \mathrm{U}_n \mathfrak{S} \mathrm{U}_n \square \mathrm{X} = -\square \mathrm{X}.$$

Donc le plan en question passe constamment par le point fixe

$$\Xi = \mathrm{X} + \frac{2}{m_2} \square \mathrm{X}.$$

On tire ensuite de cette équation

$$\mathrm{X} = \frac{m_2}{2}\left(\square + \frac{m_2}{2}\right)^{-1} \Xi.$$

Substituant cette valeur dans l'équation $\mathfrak{S}\mathrm{X} \square \mathrm{X} = 1$, il vient, pour l'équation du lieu du point Ξ,

$$\frac{m_2^2}{4} \mathfrak{S}\left[\left(\square + \frac{m_2}{2}\right)^{-1} \Xi . \square (\square + \tfrac{1}{2} m_2)^{-1} \Xi\right] = 0.$$

Ce lieu est un ellipsoïde concentrique au proposé.

693. *Trouver l'équation d'un ellipsoïde dont on donne un système de trois demi-diamètres conjugués* A, B, C.

Si l'on représente par $\mathfrak{S}\mathrm{x}\square\mathrm{x} = 1$ l'équation cherchée, on devra avoir

$$\mathfrak{S}\mathrm{A}\square\mathrm{A} = 1, \quad \mathfrak{S}\mathrm{B}\square\mathrm{B} = 1, \quad \mathfrak{S}\mathrm{C}\square\mathrm{C} = 1,$$
$$\mathfrak{S}\mathrm{B}\square\mathrm{C} = 0, \quad \mathfrak{S}\mathrm{C}\square\mathrm{A} = 0, \quad \mathfrak{S}\mathrm{A}\square\mathrm{B} = 0.$$

Les deux dernières équations, qui peuvent s'écrire

$$\mathfrak{S}\mathrm{C}\square\mathrm{A} = 0, \quad \mathfrak{S}\mathrm{B}\square\mathrm{A} = 0,$$

montrent que le vecteur $\square\mathrm{A}$ est perpendiculaire à B et à C, d'où l'on tire, θ étant un facteur réel,

$$\square\mathrm{A} \,||\, \mathfrak{V}\mathrm{BC}, \quad \theta\mathrm{A} = \square^{-1}\mathfrak{V}\mathrm{BC}, \quad \theta = \theta\mathfrak{S}\mathrm{A}\square\mathrm{A} = \mathfrak{S}\mathrm{ABC},$$

et de même pour les autres combinaisons. Or on a identiquement [art. 549, (15)]

$$\mathrm{x}.\mathfrak{S}\mathrm{ABC} = \mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BCX} + \mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{CAX} + \mathrm{C}.\mathfrak{S}\mathrm{ABX},$$

d'où, en mettant par A, B, C leurs valeurs, et opérant par $\square$,

$$(\mathfrak{S}\mathrm{ABC})^2\square\mathrm{x} = \mathfrak{V}\mathrm{BC}.\mathfrak{S}\mathrm{BCX} + \mathfrak{V}\mathrm{CA}.\mathfrak{S}\mathrm{CAX} + \mathfrak{V}\mathrm{AB}.\mathfrak{S}\mathrm{ABX},$$

et enfin, en opérant par $\mathfrak{S}\mathrm{x}\times$,

$$(\mathfrak{S}\mathrm{ABC})^2 = (\mathfrak{S}\mathrm{BCX})^2 + (\mathfrak{S}\mathrm{CAX})^2 + (\mathfrak{S}\mathrm{ABX})^2,$$

équation de l'ellipsoïde.

Cette équation peut s'interpréter ainsi : « Si l'on forme quatre tétraèdres en groupant trois à trois trois vecteurs conjugués d'un ellipsoïde et le vecteur d'un quatrième point quelconque de la surface, la somme des carrés des volumes de trois de ces tétraèdres est égale au carré du volume du quatrième. »

694. Des articles 592 et 689 il résulte que, si g_1, g_2, g_3 sont les racines de l'équation

$$\varphi(\square) = \square^3 - m_2\square^2 + m_1\square - m = 0,$$

ces racines sont les carrés des trois demi-axes principaux de la surface représentée par l'équation

$$\mathfrak{S}\mathrm{x}\square^{-1}\mathrm{x} = 1. \tag{4}$$

Si l'on remplace $\square$ par $\square + h$, on a une seconde surface pour laquelle les différences des carrés des demi-axes sont les mêmes que pour la première, et par suite l'équation

$$\mathfrak{S}[\mathrm{x}.(\square + h)^{-1}\mathrm{x}] = 1 \tag{2}$$

représente toutes les surfaces confocales avec la surface (1).

Il est facile de voir que deux surfaces confocales se coupent orthogonalement. En effet, si l'on considère deux surfaces de la série (2), correspondantes aux valeurs h et h_1 du paramètre, leurs normales correspondantes au vecteur commun x seront

$$(\square + h)^{-1}\mathrm{x}, \quad (\square + h_1)^{-1}\mathrm{x}.$$

Or on a

$$\mathfrak{S}[(\square + h)^{-1}\mathrm{x}.(\square + h_1)^{-1}\mathrm{x}] = \mathfrak{S}[\mathrm{x}.(\square + h)^{-1}(\square + h_1)^{-1}\mathrm{x}],$$

ou, à cause de l'identité $\frac{1}{ab} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$,

$$= \frac{1}{h - h_1}\mathfrak{S}\{\mathrm{x}.[(\square + h_1)^{-1} - (\square + h)^{-1}]\mathrm{x}\},$$

quantité nulle, si l'on n'a pas $h = h_1$, c'est-à-dire si les deux surfaces ne sont pas identiques.

CHAPITRE XIII.

GÉOMÉTRIE DES LIGNES ET DES SURFACES COURBES.

§ Ier.

Des lignes courbes.

695. Une équation entre un vecteur variable x, des vecteurs constants et une variable réelle t, de la forme

$$\mathrm{x} = f(t),$$

représente une ligne.

L'équation d'une droite quelconque passant par le point x est

$$\mathfrak{V}.\mathrm{A}(\Xi - \mathrm{x}) = 0,$$

et la distance du point de la courbe $\mathrm{x} + d\mathrm{x}$, infiniment voisin de x, à cette droite sera (art. 652), en grandeur et en direction,

$$\mathrm{D} = -\mathrm{A}^{-1}.\mathfrak{V}_{\mathrm{A}}d\mathrm{x}.$$

Cette distance sera généralement infiniment petite du premier ordre, tant que A fera un angle fini avec $d\mathrm{x}$.

Si nous développons $d\mathrm{x}$ suivant les puissances de dt, nous aurons

$$d\mathrm{x} = \mathrm{x}'dt + \frac{\mathrm{x}''}{2}dt^2 + \ldots.$$

La quantité $\mathfrak{V}\mathrm{A}d\mathrm{x}$ sera donc égale à

$$dt.\mathfrak{V}\mathrm{A}\mathrm{x}' + \frac{dt^2}{2}\mathfrak{V}\mathrm{A}\mathrm{x}'' + \ldots.$$

Elle sera infiniment petite du second ordre, si l'on pose

$$\mathfrak{V}\mathrm{A}\mathrm{x}' = 0, \quad \text{ou} \quad \mathrm{A} \,||\, \mathrm{x}'.$$

La droite correspondante à cette valeur de A est dite la ***tangente à la courbe***. Elle a pour équation

$$(1)\qquad \mathfrak{V}(\Xi-\mathrm{x})\,\mathrm{x}'=0,$$

ou, aux infiniment petits près d'ordre négligeable,

$$(2)\qquad \mathfrak{V}(\Xi-\mathrm{x})\,d\mathrm{x}=0.$$

696. Pour avoir la distance du point $\mathrm{x}+d\mathrm{x}$ de la courbe à la tangente, on substituera cette valeur de A dans l'expression de D; qui deviendra

$$(3)\qquad \mathrm{D}=-\tfrac{1}{2}\,dt^2.\mathrm{x}'^{-1}\mathfrak{V}\,\mathrm{x}'\mathrm{x}'',$$

ou, ce qui revient au même,

$$(4)\qquad \mathrm{D}=-\tfrac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{V}\,d\mathrm{x}\,d^2\mathrm{x}}{d\mathrm{x}}.$$

Le module de $d\mathrm{x}$ est l'élément d'arc ds de la courbe,

$$(5)\qquad \mathfrak{T}d\mathrm{x}=ds.$$

La longueur de la distance D sera donc

$$(6)\qquad \mathfrak{T}\mathrm{D}=\tfrac{1}{2}\,dt^2\mathfrak{T}\mathfrak{V}(\mathfrak{U}\mathrm{x}'.\mathrm{x}'')=\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{T}\mathfrak{V}(\mathfrak{U}d\mathrm{x}.d^2\mathrm{x}).$$

697. L'équation du plan normal, perpendiculaire au vecteur $\mathrm{x}'dt$ ou $d\mathrm{x}$, sera

$$(7)\qquad \mathfrak{S}(\Xi-\mathrm{x})\,\mathrm{x}'=0,\quad \text{ou}\quad \mathfrak{S}(\Xi-\mathrm{x})\,d\mathrm{x}=0.$$

On pourrait obtenir cette équation, en cherchant le lieu des points équidistants de x et de $\mathrm{x}+d\mathrm{x}$, ce qui donnerait

$$\mathfrak{T}(\Xi-\mathrm{x}-d\mathrm{x})=\mathfrak{T}(\Xi-\mathrm{x}),\quad \text{ou}\quad d_{\mathrm{x}}\mathfrak{T}(\Xi-\mathrm{x})=0,$$

ou enfin l'équation (7).

L'équation d'un plan tangent sera

$$(8)\qquad \mathfrak{S}(\Xi-\mathrm{x})\,\mathrm{A}\,d\mathrm{x}=0,$$

A étant un vecteur quelconque.

L'équation d'une normale quelconque sera

(9) $\quad \Xi - \text{x} \parallel \mathfrak{V}\text{A}d\text{x}, \quad$ ou $\quad \mathfrak{V}[(\Xi - \text{x}).\mathfrak{V}\text{A}d\text{x}] = 0,$

ou encore [art. 547, (9)]

$$d\text{x}.\mathfrak{S}(\Xi - \text{x})\text{A} - \text{A}.\mathfrak{S}(\Xi - \text{x})d\text{x} = 0.$$

698. Soient deux positions successives

$$\mathfrak{V}\text{A}(\text{x} - \text{B}) = 0, \qquad \mathfrak{V}\text{A}'(\text{x} - \text{B}') = 0$$

d'une droite mobile, par suite de la variation d'un paramètre réel t, dont les coefficients A, B sont des fonctions. Le vecteur qui correspond à la plus courte distance de ces deux positions a pour expression

$$\text{D} = -(\mathfrak{V}\text{AA}')^{-1}\mathfrak{S}[\mathfrak{V}\text{AA}'.(\text{B}' - \text{B})],$$

ou, si l'on pose $\text{A}' = \text{A} + d\text{A}$, $\text{B}' = \text{B} + d\text{B}$,

$$\text{D} = -(\mathfrak{V}\text{A}d\text{A})^{-1}\mathfrak{S}\text{A}d\text{A}d\text{B}.$$

En faisant maintenant

$$d\text{A} = \text{A}'dt + \tfrac{1}{2}\text{A}''dt^2 + \ldots, \qquad d\text{B} = \text{B}'dt + \tfrac{1}{2}\text{B}''dt^2 + \ldots,$$

on voit d'abord que

$$\text{D} = -(\mathfrak{V}\text{AA}')^{-1}.dt.\mathfrak{S}\text{AA}'\text{B}'$$

est infiniment petit du premier ordre, à moins que l'on n'ait

$$\mathfrak{S}\text{AA}'\text{B}' = 0,$$

$\mathfrak{V}\text{AA}'$ étant différent de zéro [1]. Dans ce cas, en poussant plus loin les développements, on a, aux quantités près du quatrième ordre,

$$\mathfrak{S}\text{A}d\text{A}d\text{B} = \tfrac{1}{2}dt^2\mathfrak{S}\text{A}[\text{A}'\text{B}'' + \text{A}''\text{B}' + \tfrac{1}{3}(2\text{A}'\text{B}''' + 3\text{A}''\text{B}'' + 2\text{A}'''\text{B}')dt].$$

---

[1] Le cas de $\mathfrak{V}\text{AA}' = 0$ serait celui où A serait parallèle à $\text{A} + d\text{A}$, et où la droite se mouvrait parallèlement à elle-même.

D'ailleurs, en différentiant la condition $\mathfrak{S}\mathrm{AA'B'}=0$, il vient

$$0=\mathfrak{S}(\mathrm{A'A'B'}+\mathrm{AA''B'}+\mathrm{AA'B''})=\mathfrak{S}\mathrm{A}(\mathrm{A'B''}+\mathrm{A''B'}),$$

d'où il s'ensuit que la partie du troisième ordre de $\mathfrak{S}\mathrm{A}d\mathrm{A}d\mathrm{B}$ s'évanouit. La plus courte distance des deux positions consécutives de la droite est donc alors infiniment petite d'ordre supérieur au second.

En différentiant une fois de plus, il vient

$$0=\mathfrak{S}[\mathrm{A}(\mathrm{A'B'''}+2\mathrm{A''B''}+\mathrm{A'''B'})+\mathrm{A'A''B'}],$$

ce qui réduit l'expression de $\mathfrak{S}\mathrm{A}d\mathrm{A}d\mathrm{B}$ à

$$-\tfrac{1}{12}\,dt^3\,\mathrm{S}(\mathrm{AA''B''}+2\mathrm{A'A''B'})=\tfrac{1}{12}\,dt^3\,\mathfrak{S}\mathrm{A''}(\mathrm{AB''}+2\mathrm{A'B'}).$$

Donc nous aurons

$$\begin{aligned}\mathrm{D}&=-\frac{dt^3}{12}(\mathfrak{V}\mathrm{AA'})^{-1}\mathfrak{S}\mathrm{A''}(\mathrm{A'B''}+2\mathrm{A'B'})\\&=-\tfrac{1}{12}\mathfrak{V}(\mathrm{A}d\mathrm{A})^{-1}\mathfrak{S}d^2\mathrm{A}(\mathrm{A}d^2\mathrm{B}+2d\mathrm{A}d\mathrm{B}).\end{aligned}$$

699. Si la droite mobile est la tangente (1) à une courbe quelconque, on aura $\mathrm{A}=\mathrm{X'}$, $\mathrm{B}=\mathrm{X}$. Alors

$$\mathfrak{S}\mathrm{AA'B'}=\mathfrak{S}\mathrm{X'X''X'}=0.$$

Donc la plus courte distance des deux tangentes consécutives d'une courbe quelconque est infiniment petite du troisième ordre en général.

La valeur de D se réduit, dans ce cas, à

$$\mathrm{D}=-\frac{dt^3}{12}(\mathfrak{V}\mathrm{X'X''})^{-1}\mathfrak{S}\mathrm{X'''}(\mathrm{X'X''}+2\mathrm{X''X'}),$$

c'est-à-dire à

(10) $$\mathrm{D}=\frac{dt^3}{12}\,\frac{\mathfrak{S}\mathrm{X'X''X'''}}{\mathfrak{V}\mathrm{X'X''}}=\tfrac{1}{12}\,\frac{\mathfrak{S}d\mathrm{X}d^2\mathrm{X}d^3\mathrm{X}}{\mathfrak{V}d\mathrm{X}d^2\mathrm{X}}.$$

700. *Plan osculateur*. Un plan quelconque, passant par le point X, peut être représenté par l'équation

$$\mathfrak{S}(\Xi-\mathrm{X})\mathrm{AB}=0,$$

A et B étant deux vecteurs constants, tracés dans ce plan. La distance du point $x + dx$ à ce plan sera

$$D = -(\mathfrak{V}AB)^{-1}\mathfrak{S}AB\,dx.$$

Or, en développant la valeur de dx, on a

$$\mathfrak{S}AB\,dx = \mathfrak{S}AB\left(x'dt + \frac{x''}{2}dt^2 + \frac{x'''}{6}dt^3 + \ldots\right).$$

Pour que la distance D soit infiniment petite d'ordre supérieur au premier, il faut que l'on ait

$$\mathfrak{S}ABx' = 0,$$

équation satisfaite par $B = x'$, ce qui ramène à l'équation (8) (art. 697) d'un plan tangent quelconque.

Pour que la distance soit infiniment petite d'ordre supérieur au second, il faut que l'on ait, en outre, la condition

$$\mathfrak{S}ABx'' = 0.$$

De ces deux conditions on conclut que le vecteur $\mathfrak{V}AB$ doit être perpendiculaire aux deux vecteurs x', x'', et par suite à leur plan. Donc

$$\mathfrak{V}AB \parallel \mathfrak{V}x'x'',$$

et par suite l'équation du plan devient

(11) $$\mathfrak{S}(\Xi - x)x'x'' = 0.$$

Telle est l'équation du plan osculateur.

On aurait pu l'obtenir en cherchant la limite du plan passant par le point x et par deux points infiniment voisins $x + dx$, $x + dx + d(x + dx)$, ce qui aurait donné immédiatement l'équation

(12) $$\mathfrak{S}(\Xi - x)\,dx\,d^2x = 0.$$

701. La distance du point $x + dx$ au plan osculateur en x sera

$$D = -\tfrac{1}{6}dt^3\frac{\mathfrak{S}x'x''x'''}{\mathfrak{V}x'x''} = -\tfrac{1}{6}\frac{\mathfrak{S}\,dx\,d^2x\,d^3x}{\mathfrak{V}\,dx\,d^2x}.$$

Elle est double de la distance des deux tangentes en x et en $x + dx$, et de signe contraire.

L'équation d'un vecteur perpendiculaire au plan osculateur est

$$(13) \qquad \Xi - \mathrm{A} \parallel \mathfrak{V} x'x'', \quad \text{ou} \quad \mathfrak{V}[(\Xi - \mathrm{A}).\mathfrak{V}x'x''] = 0.$$

702. La normale principale est l'intersection du plan normal et du plan osculateur; elle est donc représentée par l'ensemble des deux équations

$$\mathfrak{S}(\Xi - x)x' = 0, \quad \mathfrak{S}(\Xi - x)x'x'' = 0,$$

d'où l'on tire

$$\Xi - x \parallel \mathfrak{V}(x'.\mathfrak{V}x'x''),$$

ou, à cause de $\mathfrak{S}(x'.\mathfrak{V}x'x'') = 0$,

$$(14) \qquad \Xi - x \parallel x'.\mathfrak{V}x'x'', \quad \text{ou} \quad \mathfrak{V}[(\Xi - x)x'\mathfrak{V}x'x''] = 0,$$

que l'on pourrait écrire sous l'une des formes

$$x'.\mathfrak{S}[(\Xi - x)x'x''] - \mathfrak{V}x'x''.\mathfrak{S}[(\Xi - x)x'] = 0,$$
$$x'^2\mathfrak{V}[(\Xi - x)x''] - \mathfrak{S}x'x''\mathfrak{V}[(\Xi - x)x'] = 0.$$

703. L'intersection de deux plans normaux infiniment voisins, où l'axe de courbure est représenté par l'ensemble des équations

$$(15) \qquad \mathfrak{S}(\Xi - x)x' = 0, \quad \mathfrak{S}(\Xi - x)x'' = x'^2.$$

La combinaison de la première de ces équations avec celle du plan osculateur (11) donne l'équation (14), ou

$$\Xi - x = \theta\mathfrak{V}(x'.\mathfrak{V}x'x'').$$

Substituant cette valeur dans la seconde équation (15), il vient

$$\theta = \frac{x'^2}{\mathfrak{S}[\mathfrak{V}(x'.\mathfrak{V}x'x'').x''} = -\frac{x'^2}{(\mathfrak{V}x'x'')^2},$$

d'où l'on tire, pour le vecteur du centre de courbure,

$$(16)\quad \text{R} = \Xi - \text{x} = -\frac{\text{x}'^2\mathfrak{V}(\text{x}'.\mathfrak{V}\text{x}'\text{x}'')}{(\mathfrak{V}\text{x}'\text{x}'')^2} = -\frac{\text{x}'^2.\mathfrak{V}\text{x}'\text{x}''}{(\mathfrak{V}\text{x}'\text{x}'')^2} = \frac{\text{x}'^2}{\mathfrak{V}\text{x}'\text{x}''}\ (^1).$$

On a ainsi l'équation du lieu des centres de courbure.

En remplaçant, dans la formule (13), A par la valeur de Ξ tirée de (16), on aura, pour l'équation de l'axe de courbure,

$$(17)\quad \begin{cases} \Xi - \text{x} + \dfrac{\text{x}'^2\mathfrak{V}\text{x}'\text{x}''}{(\mathfrak{V}\text{x}'\text{x}'')^2} \parallel \mathfrak{V}\text{x}'\text{x}'', \\ \text{ou} \\ \mathfrak{V}[(\Xi - \text{x}).\mathfrak{V}\text{x}'\text{x}''] + \text{x}'^2 = 0. \end{cases}$$

Le rayon de courbure se tire de la formule (16), en opérant par $\mathfrak{T}$, ce qui donne

$$(18)\quad \rho = \mathfrak{T}(\Xi - \text{x}) = \frac{ds^3}{\mathfrak{T}(\mathfrak{V}\,d\text{x}\,d^2\text{x})}.$$

On tire de là, pour l'expression de l'angle de contingence,

$$(19)\quad d\tau = \frac{ds}{\rho} = \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{V}\,d\text{x}\,d^2\text{x}}{ds^2}.$$

704. Si l'on prend pour variable indépendante l'arc s, alors $\mathfrak{T}\dfrac{d\text{x}}{ds} = 1$, d'où

$$0 = \tfrac{1}{2}d.\left(\mathfrak{T}\frac{d\text{x}}{ds}\right)^2 = \mathfrak{S}.\frac{d\text{x}\,d^2\text{x}}{ds^2}.$$

Donc alors $d^2\text{x}$ est perpendiculaire à $d\text{x}$, et l'on a

$$\mathfrak{S}\,d\text{x}\,d^2\text{x} = 0, \qquad \mathfrak{V}\,d\text{x}\,d^2\text{x} = d\text{x}\,d^2\text{x}.$$

Les formules précédentes se simplifient, et l'on a, pour le vecteur de courbure,

$$\Xi - \text{x} = -\frac{1}{\text{x}''},$$

---

(1) En effet

$$\mathfrak{V}\left(\frac{\text{A}}{\text{B}}.\text{B}\right) = \text{B}^{-1}.\mathfrak{S}\text{AB} - \text{A} + \text{B}\mathfrak{S}\text{B}^{-1}\text{A}$$

se réduit ici à $-\text{A}$, à cause de $\mathfrak{S}\text{AB} = 0$.

pour le rayon de courbure,

$$\rho = \frac{1}{\mathfrak{T}\mathrm{x}''},$$

et pour l'équation de l'axe de courbure,

$$\mathfrak{V}[(\Xi - \mathrm{x})\mathrm{x}'\mathrm{x}''] - \mathrm{x}' = 0.$$

Des simplifications analogues se produiront toutes les fois que la variable t sera proportionnelle à s.

705. On peut encore obtenir autrement ces formules. Soient P, Q deux vecteurs quelconques. On a

$$\mathfrak{V}\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}} = \mathfrak{V}\frac{\mathrm{Q}-\mathrm{P}}{\mathrm{P}},$$

d'où, en prenant les modules de part et d'autre, et remarquant que, si θ est l'angle de la biradiale POQ, on a $\mathfrak{T}\mathfrak{V}\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}} = \sin\theta \,.\, \mathfrak{T}\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}$.

$$\sin\theta \,.\, \mathfrak{T}\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}} = \mathfrak{T}\mathfrak{V}\frac{\mathrm{Q}-\mathrm{P}}{\mathrm{P}}.$$

Si P et $\mathrm{Q} = \mathrm{P} + d\mathrm{P}$ sont deux vecteurs infiniment peu différents, on aura alors

$$\mathfrak{T}\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}} = 1, \quad \sin\theta = d\theta,$$

et par suite

(20) $$d\theta = \mathfrak{T}\mathfrak{V}\frac{d\mathrm{P}}{\mathrm{P}}.$$

Supposons maintenant que P soit un segment infiniment petit $\mathrm{x}'dt$ pris sur la tangente au point x; $d\theta$ sera l'angle de contingence $d\tau$, formé par les tangentes en x et en $\mathrm{x} + d\mathrm{x}$, et l'on aura

$$d\tau = \mathfrak{T}\mathfrak{V}\frac{d\mathrm{x}'}{\mathrm{x}'} = \mathfrak{T}\mathfrak{V}\frac{d\mathrm{x}d^2\mathrm{x}}{d\mathrm{x}^2}.$$

C'est la formule (19), d'où l'on tire ensuite la formule (18).

706. De même, $\mathfrak{V}\mathrm{x}'\mathrm{x}''$ étant un vecteur perpendiculaire au

plan osculateur (art. 701), on trouvera, pour l'angle de deux plans osculateurs consécutifs ou angle de torsion,

$$(21)\quad d\upsilon = \mathfrak{T}\mathfrak{V}\,\frac{d.\mathfrak{V}x'x''}{\mathfrak{V}x'x''} = dt\mathfrak{T}\mathfrak{V}\,\frac{\mathfrak{V}x'x'''}{\mathfrak{V}x'x''} = \mathfrak{T}\mathfrak{V}\,\frac{\mathfrak{V}dxd^3x}{\mathfrak{V}dxd^2x},$$

ou encore [art. 549, (13)'], à cause de $\mathfrak{V}(\mathfrak{V}x'x''.\mathfrak{V}x'x''') = -x'.\mathfrak{S}x'x''x'''$, et de $\mathfrak{T}dx = ds$,

$$(22)\qquad d\upsilon = ds\,\frac{\mathfrak{S}x'x''x'''}{(\mathfrak{V}x'x'')^2} = ds\,\frac{\mathfrak{S}dxd^2xd^3x}{(\mathfrak{V}dxd^2x)^2}.$$

Si l'on prend ds pour variable indépendante, on a $\mathfrak{V}x'x'' = x'x''$, ce qui donne, à cause de $\frac{d\mathfrak{S}x'x''}{ds} = x''^2 + \mathfrak{S}x'x''' = 0$, d'où $d(x'x'') = ds.\mathfrak{V}x'x'''$,

$$d\upsilon = \mathfrak{T}\mathfrak{V}\,\frac{d.x'x''}{x'x''} = ds\mathfrak{T}\mathfrak{V}\,\frac{\mathfrak{V}x'x'''}{x'x''} = ds\,\frac{\mathfrak{S}x'x''x'''}{(x'x'')^2}.$$

707. En comparant l'expression (22) de $d\upsilon$ avec la valeur

$$\delta = \tfrac{1}{6}\mathfrak{T}\,\frac{\mathfrak{S}dxd^2xd^3x}{\mathfrak{V}dxd^2x}$$

de la distance du point $x + dx$ au plan osculateur en x, on trouve

$$d\upsilon = \frac{6\delta.ds}{\mathfrak{T}\mathfrak{V}dxd^2x} = \frac{6\delta}{ds\,d\tau},$$

ou, en désignant par δ' la distance du point $x + dx$ à la tangente,

$$d\upsilon = 3\frac{\delta}{\delta'}.$$

708. L'équation de l'axe de courbure étant

$$\mathfrak{V}[(\Xi - x)\mathfrak{V}x'x'' + x''^2] = 0,$$

si l'on pose

$$\mathfrak{S}[(\Xi - x)\mathfrak{V}x'x'' + x''^2] = \mathfrak{S}[(\Xi - x)\,x'x''] = v,$$

elle pourra s'écrire sous la forme

$$(23)\qquad (\Xi-\mathbf{x})\mathfrak{V}\mathbf{x}'\mathbf{x}''+\mathbf{x}'^2=v,$$

v variant d'un point à l'autre de l'axe de courbure.

Si l'on fait varier à la fois t et v, on aura l'équation de la surface lieu des axes de courbure, ou de la *surface polaire* de la courbe proposée.

On aura l'arête de rebroussement de cette surface, ou le lieu du centre de la sphère osculatrice à la courbe, en éliminant t entre l'équation de l'axe de courbure et sa différentielle, prise en considérant Ξ comme constant.

709. Cherchons maintenant l'équation générale des développées de la courbe. La tangente à la développée étant la ligne qui joint le point Ξ de la développée au point $\mathbf{x}$ de la courbe, on a l'équation

$$(24)\qquad \mathfrak{V}(\Xi-\mathbf{x})d\Xi=0.$$

$\Xi-\mathbf{x}$, devant être une normale à la courbe, sera perpendiculaire à $d\mathbf{x}$; il en sera donc de même de sa parallèle $d\Xi$, d'où l'on tire

$$(25)\qquad \mathfrak{V}\,d\Xi\,d\mathbf{x}=0.$$

Si l'on pose

$$(26)\qquad \mathfrak{T}(\Xi-\mathbf{x})=q,\quad \text{d'où}\quad (\Xi-\mathbf{x})^2=-q^2,$$

cette équation, jointe à celle de l'axe de courbure (17), fera connaître les trois composantes rectangulaires ξ_1, ξ_2, ξ_3 de Ξ en fonction de t et de q, ce qui fournira une nouvelle détermination de la surface polaire.

La quantité $(\Xi-\mathbf{x})d\Xi$ étant réelle, ainsi que $\dfrac{(\Xi-\mathbf{x})d\Xi}{d\Xi^2}$, on aura

$$\frac{\mathfrak{T}(\Xi-\mathbf{x})}{\mathfrak{T}d\Xi}=\pm\frac{\mathfrak{S}(\Xi-\mathbf{x})d\Xi}{d\Xi^2}.$$

D'ailleurs, en vertu de l'équation du plan normal $\mathfrak{S}(\Xi - x)dx = 0$, on a

$$\mathfrak{T}(\Xi - x).d\mathfrak{T}(\Xi - x) = -\mathfrak{S}(\Xi - x)d(\Xi - x) = -\mathfrak{S}(\Xi - x)\,d\Xi.$$

Donc

$$\frac{\mathfrak{T}(\Xi - x)}{\mathfrak{T}d\Xi} = \pm\frac{\mathfrak{T}(\Xi - x).d\mathfrak{T}(\Xi - x)}{(\mathfrak{T}d\Xi)^2},$$

d'où l'on tire

$$d\mathfrak{T}(\Xi - x) = \pm\,\mathfrak{T}d\Xi,$$

c'est-à-dire que l'élément d'arc de la développée est égal à l'accroissement correspondant de la longueur du vecteur $\Xi - x$.

710. Désignons par U le vecteur qui joint le centre de courbure $R + x$ de la courbe au point Ξ de la développée. On aura

$$\Xi - x = R + U.$$

En mettant pour $\Xi - x$ cette valeur dans l'équation (24), il vient

$$(27)\qquad \mathfrak{V}[(R + U)d(x + R + U)] = 0.$$

Le vecteur R est donné en fonction de t par l'équation (16)

$$R = \frac{x'^2}{\mathfrak{V}x'x''}.$$

Le vecteur U est parallèle à $\mathfrak{V}x'x''$, et, en désignant par u son module, il a pour valeur

$$U = u.\frac{\mathfrak{V}x'x''}{\mathfrak{T}\mathfrak{V}x'x''}.$$

En mettant ces valeurs dans l'équation (27), on aura une équation différentielle entre t, u, dt, du, qui représentera les développées de la courbe proposée.

711. Appliquons les formules précédentes à l'hélice. Si l'on pose

$$\Omega_1 = I_1\cos t + I_2\sin t,\qquad \Omega_2 = \frac{d\Omega_1}{dt} = -I_1\sin t + I_2\cos t,$$

les trois vecteurs unitaires $\Omega_1, \Omega_2, \iota_3$ formeront un système rectangulaire, et l'on aura les relations

$$\Omega_1^2 = \Omega_2^2 = \iota_3^2 = -1, \qquad \Omega_1\Omega_2 = -\Omega_2\Omega_1 = -\iota_3, \text{ etc....}$$

L'équation de l'hélice pourra se mettre sous la forme

$$x = a\Omega_1 + bt\iota_3,$$

d'où l'on tire, en posant $a^2 + b^2 = c^2$,

$$x' = a\Omega_2 + b\iota_3, \qquad x'' = -a\Omega_1, \qquad x''' = -a\Omega_2,$$
$$ds = c\,dt, \qquad x'x'' = ab\Omega_2 - a^2\iota_3,$$
$$xx' = -b^2t + abt\Omega_1 + ab\Omega_2 - a^2\iota_3,$$
$$xx'x'' = a^2bt + ab^2t\Omega_1 - a^2\Omega_2 - a^2b\iota_3.$$

L'équation de la tangente sera

$$\mathfrak{V}\Xi(a\Omega_2 + b\iota_3) = a(bt\Omega_1 + b\Omega_3 + a\iota_3).$$

Celle du plan normal sera

$$\mathfrak{S}\Xi(a\Omega_2 + b\iota_3) = -b^2t.$$

La distance du point $x + dx$ à la tangente sera, à cause de $d^2s = 0$, d'où $\mathfrak{S}x'x'' = 0$,

$$D = -\tfrac{1}{2}d^2x = \tfrac{1}{2}a\Omega_1 dt^2, \qquad \text{d'où} \qquad \mathfrak{T}D = \tfrac{1}{2}a\,dt^2.$$

L'équation du plan osculateur est

$$\mathfrak{S}\Xi(b\Omega_2 - a\iota_3) = ab;$$

celle de la normale principale,

$$\mathfrak{V}\Xi\Omega_1 = -bt\Omega_2.$$

En mettant la valeur de Ξ sous la forme $\xi^{(1)}\Omega_1 + \xi^{(2)}\Omega_2 + \xi_3\iota_3$, on trouve immédiatement

$$\xi^{(2)} = -\xi_1 \sin t + \xi_2 \cos t = 0, \qquad \xi_3 = bt = x_3,$$

équations cartésiennes de la normale principale. En égalant $\mathfrak{S}\Xi\Omega_1 = -\xi^{(1)}$ à une nouvelle variable u, on a, pour la surface

lieu des normales principales, les équations

$$\xi_1 = u\cos t, \qquad \xi_2 = u\sin t, \qquad \xi_3 = bt.$$

ou

$$\Xi = u\Omega_1 + bt\iota_3.$$

Cette surface est l'hélicoïde gauche.

Le vecteur du centre de courbure est

$$\mathrm{R} = \Xi - \mathrm{x} = -\frac{c^2}{\mathrm{x}''} = -\frac{c^2}{a}\,\Omega_1, \qquad \text{d'où} \qquad \rho = \frac{c^2}{a}\cdot$$

L'équation de l'axe de courbure est

$$a\,\mathfrak{V}\,\Xi(b\Omega_2 - a\iota_3) = b^2(at\Omega_1 + a\Omega_2 + b\iota_3).$$

Les angles de contingence et de torsion sont

$$d\tau = \frac{a}{c}\,dt, \qquad d\upsilon = \frac{b}{c}\,dt.$$

La distance du point $\mathrm{x} + d\mathrm{x}$ au plan osculateur est

$$\delta = \frac{1}{6}\frac{ab}{c}\,dt^3.$$

L'équation (23) de la surface polaire sera

$$a\Xi(b\Omega_2 - a\iota_3) = a^2bt + bc^2u + ab^2t\Omega_1 + ab^2\Omega_2 + b^3\iota_3,$$

en écrivant bc^2u au lieu de v. En développant, l'équation devient

$$-ab\xi^{(2)} + a^2\xi_3 + (a^2\xi^{(2)} + ab\xi_3)\Omega_1 - a\xi^{(1)}(a\Omega_2 + b\iota_3)$$
$$= a^2bt + bc^2u + ab^2t\Omega_1 + b^2(a\Omega_2 + b\iota_3),$$

d'où l'on tire, en décomposant,

$$\xi^{(1)} = -\frac{b^2}{a}, \qquad \xi^{(2)} = -\frac{b^2}{a}\,u, \qquad \xi_3 = b(t+u),$$

et par suite

$$\Xi = -\frac{b^2}{a}(\Omega_1 + u\Omega_2) + b(t+u)\iota_3.$$

Pour avoir le centre de la sphère osculatrice, cherchons

l'intersection de deux axes de courbure infiniment voisins. En joignant à l'équation de l'axe de courbure sa différentielle par rapport à t,

$$-ab . \mathfrak{D}\,\Xi\,\Omega_1 = ab^2 t\Omega_2,$$

d'où, en développant et décomposant,

$$a\xi^{(2)} + b\xi_3 = b^2 t, \quad -a\xi^{(1)} = b^2, \quad \xi^{(2)} = 0,$$

on en tire

$$\Xi = -\frac{b^2}{a}\Omega_1 + bt\mathrm{I}_3, \quad \Xi - \mathrm{X} = -\frac{c^2}{a}\Omega_1 = \mathrm{R}.$$

Donc le centre de la sphère osculatrice coïncide avec le centre de courbure.

Cherchons enfin l'équation aux développées. On a

$$\mathrm{R} + \mathrm{U} = -\frac{c^2}{a}\Omega_1 + u(b\Omega_2 - a\mathrm{I}_3),$$

d'où

$$d(\mathrm{X}+\mathrm{R}+\mathrm{U}) = -\left[u\Omega_1 + \frac{1}{a}(b\Omega_2 - a\mathrm{I}_3)\right]b\,dt + (b\Omega_2 - a\mathrm{I}_3)du.$$

L'équation (27) donne alors

$$-(a\Omega_2 + b\mathrm{I}_3)\left[\left(\frac{c^2}{a^2} + u^2\right)b\,dt - \frac{c^2}{a}du\right] = 0,$$

d'où

$$ab\,dt = \frac{c^2 du}{\dfrac{c^2}{a^2} + u^2},$$

équation différentielle des développées de l'hélice. Connaissant u en fonction de t, on substituera sa valeur dans l'expression

$$\Xi = \mathrm{X} + \mathrm{R} + \mathrm{U}.$$

§ II.

Des surfaces courbes.

712. Une équation

$$(1) \qquad \mathrm{x} = f(t, u)$$

entre un vecteur variable, des vecteurs constants et *deux* variables réelles t, u, représente une surface.

Soit

$$(2) \qquad \mathfrak{S}(\Xi - \mathrm{x})\mathrm{A} = 0$$

l'équation d'un plan passant par x. La distance du point $\mathrm{x} + d\mathrm{x}$ à ce plan sera

$$\mathrm{D} = -\mathrm{A}^{-1}\mathfrak{S}\mathrm{A}\,d\mathrm{x},$$

ou, en développant, et désignant, pour abréger, par x', $\mathrm{x}_{,}$ les dérivées partielles $\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial u}$,

$$\mathrm{D} = -\mathrm{A}^{-1}\mathfrak{S}\mathrm{A}(\mathrm{x}'dt + \mathrm{x}_{,}du + \varepsilon_2),$$

ε_2 étant un infiniment petit du second ordre. Cette distance sera infiniment petite d'ordre supérieur au premier, si l'on choisit A par la condition

$$\mathfrak{S}\mathrm{A}(\mathrm{x}'dt + \mathrm{x}_{,}du) = 0,$$

et cela aura lieu tout autour du point x, si l'on pose séparément

$$\mathfrak{S}\mathrm{A}\mathrm{x}' = 0, \qquad \mathfrak{S}\mathrm{A}\mathrm{x}_{,} = 0,$$

c'est-à-dire si A est perpendiculaire au plan $\mathrm{x}'\mathrm{x}_{,}$, ou si l'on a

$$\mathrm{A} \parallel \mathfrak{V}\mathrm{x}'\mathrm{x}_{,}.$$

L'équation (2) du plan tangent devient alors

$$(3) \qquad \mathfrak{S}(\Xi - \mathrm{x})\mathrm{x}'\mathrm{x}_{,} = 0.$$

Le vecteur

$$(4) \qquad \mathrm{N} = \mathfrak{V}\mathrm{x}'\mathrm{x}_{,}$$

est la normale à la surface, et l'équation différentielle de la surface peut s'écrire sous la forme

$$\text{(5)} \qquad \mathfrak{S}\text{N}d\text{x} = 0.$$

Si l'équation de la surface est donnée sous la forme

$$\text{F}(\text{x}) = c,$$

c étant une constante réelle, N n'est autre chose que la quantité $\nabla\text{F}(\text{x})$, que nous avons considérée dans l'art. 610.

713. Ces conditions étant remplies, la distance du point $\text{x} + d\text{x}$ au plan tangent sera, aux infiniment petits du troisième ordre près,

$$\text{(6)} \qquad \text{D} = -\tfrac{1}{2}\text{N}^{-1}.\mathfrak{S}\text{N}(\text{x}''dt^2 + 2\text{x}'_{,}dtdu + \text{x}_{,,}du^2),$$

et la courbure de la section normale correspondante à une valeur donnée de $\frac{du}{dt}$ sera

$$\text{(7)} \qquad \frac{1}{r} = -\frac{2\mathfrak{T}\text{D}}{d\text{x}^2} = \pm\frac{\mathfrak{S}(\mathfrak{U}\text{N}.d^2\text{x})}{d\text{x}^2}.$$

Si l'on suppose $\mathfrak{T}\text{D}$ constant, on voit que r varie proportionnellement au carré du demi-diamètre $\mathfrak{T}d\text{x}$ de l'indicatrice, d'où l'on déduit le théorème d'Euler.

On peut encore chercher directement le maximum ou le minimum de la valeur de $\frac{1}{r}$, laquelle, en posant $du = mdt$, prend la forme

$$\frac{\alpha + 2\beta m + \gamma m^2}{(\text{x}' + \text{x}_{,}m)^2}.$$

En égalant $d\frac{1}{r}$ à zéro, on a l'équation aux sections principales.

Si l'on considère une section oblique passant par la même tangente que la section normale, et faisant avec son plan un angle θ, la distance du point $\text{x} + d\text{x}$ à la tangente sera $\mathfrak{T}\text{D}.\text{séc}\,\theta$, d'où l'on déduit le théorème de Meusnier.

714. Une ligne géodésique ayant son plan osculateur normal

à la surface, on obtiendra son équation en écrivant que la normale $\mathfrak{V}d\mathrm{x}d^2\mathrm{x}$ à son plan osculateur est perpendiculaire à la normale N à la surface, ce qui donne la condition

$$\mathfrak{S}\mathrm{N}d\mathrm{x}d^2\mathrm{x} = 0. \tag{8}$$

On aura ainsi une équation différentielle du second ordre entre les variables t et u, qui sera l'équation générale des lignes géodésiques.

715. Appliquons ces diverses formules à l'hélicoïde gauche. représenté par l'équation

$$\mathrm{x} = u\Omega_1 + bt\mathrm{I}_3.$$

On a d'abord, en prenant u pour variable indépendante,

$$\mathrm{N} = \mathfrak{V}(u\Omega_2 + b\mathrm{I}_3)\Omega_1 = -b\Omega_2 + u\mathrm{I}_3,$$

$$d\mathrm{x} = (u\Omega_2 + b\mathrm{I}_3)dt + \Omega_1 du,$$

$$d^2\mathrm{x} = (u\Omega_2 + b\mathrm{I}_3)d^2t + u\Omega_1 dt^2 + 2\Omega_2 du dt,$$

$$\mathfrak{T}\mathrm{N} = \sqrt{u^2 + b^2}, \qquad \mathfrak{U}\mathrm{N} = \frac{-b\Omega_2 + u\mathrm{I}_3}{\sqrt{u^2 + b^2}},$$

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{U}\mathrm{N}.d^2\mathrm{x}) = \frac{2b\,dt\,du}{\sqrt{u^2 + b^2}},$$

$$d\mathrm{x}^2 = -(u^2 + b^2)dt^2 - du^2,$$

d'où, en posant $\frac{du}{dt} = m$,

$$\frac{1}{r} = \frac{2b}{\sqrt{u^2 + b^2}} \cdot \frac{m}{u^2 + b^2 + m^2}.$$

Le maximum et le minimum de cette expression correspondent à

$$m = \pm\sqrt{u^2 + b^2},$$

d'où l'on tire, pour les deux courbures principales,

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = \pm\frac{b}{u^2 + b^2},$$

et pour l'équation aux lignes de courbure

$$dt = \pm \frac{du}{\sqrt{u^2 + b^2}}.$$

L'équation aux lignes asymptotiques

$$S \mathrm{N} d^2 \mathrm{x} = 0,$$

devient ici

$$du\,dt = 0.$$

On trouve, pour l'équation aux lignes géodésiques,

$$(u^2 + b^2)(du\,d^2t + u\,dt^3) + 2u\,dt\,du^2 = 0,$$

ou, en posant $\frac{du}{dt} = x$, $u^2 + b^2 = 2y$,

$$x^3 y\,dy + d(xy) = 0,$$

et, en faisant $xy = z$,

$$\frac{x\,dz - z\,dx}{z^2} + \frac{dz}{z^3} = 0.$$

On en tire, en intégrant,

$$2xz + 1 = 2cz^2, \qquad \text{ou} \qquad 2x^2y + 1 = 2cx^2y^2,$$

ou, en mettant pour x et y leurs valeurs,

$$dt = \frac{du}{\sqrt{u^2 + b^2}\sqrt{c(u^2 + b^2) - 1}}.$$

§ III.

Applications à la Cinématique.

716. Un vecteur variable x étant exprimé en fonction du temps par l'équation

(1) $$\mathrm{x} = f(t),$$

qui donne à la fois la forme de l'orbite du point x et la loi

suivant laquelle cette orbite est parcourue, la courbe qui a pour vecteur la dérivée

$$\mathbf{x}' = f'(t) \tag{2}$$

du vecteur x est dite l'*hodographe* de l'orbite (1).

Le vecteur de l'accélération dans l'orbite (1),

$$\mathbf{x}'' = f''(t),$$

est le vecteur de la vitesse dans l'hodographe.

717. En désignant toujours l'élément d'arc par $ds = \mathfrak{T}d\mathbf{x}$, et par v la vitesse $\frac{ds}{dt}$, on a

$$\mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v\mathrm{T}, \tag{3}$$

$\mathrm{T} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}$ étant un vecteur unitaire parallèle à la tangente, d'où l'on voit que x′ représente la vitesse en grandeur et en direction.

Si l'on différentie l'équation (3), il vient

$$\mathbf{x}'' = \frac{dv}{dt}\frac{d\mathbf{x}}{ds} + v\frac{d\frac{d\mathbf{x}}{ds}}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{d\mathbf{x}}{ds} + v^2\frac{d\frac{d\mathbf{x}}{ds}}{ds}.$$

Nous avons vu (art. 704), que $\frac{d\frac{d\mathbf{x}}{ds}}{ds}$ représente un vecteur normal à la courbe au point x, dirigé de ce point vers le centre de courbure, et ayant pour module la courbure $\frac{1}{\rho}$. Si l'on représente donc ce vecteur par $\frac{\mathrm{N}}{\rho}$, et l'accélération tangentielle $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ par φ, on aura

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \varphi\mathrm{T} + \frac{v^2}{\rho}\mathrm{N}. \tag{4}$$

équation qui exprime très simplement la décomposition de l'accélération totale $\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$ en une composante $\frac{dv}{dt}$, dirigée suivant

la tangente, et une composante normale $\frac{v^2}{\rho}$ dirigée suivant la normale principale, et *vers* le centre de courbure de l'orbite.

718. L'équation en coordonnées polaires r, p d'une courbe plane peut s'écrire sous la forme

$$\mathrm{x} = \mathrm{B}.r\mathrm{A}^p,$$

B étant un vecteur unitaire situé dans le plan de la courbe, A l'axe unitaire de ce plan, et l'angle p étant exprimé, *dans les exponentielles* (art. 526), en parties du quadrant.

On peut considérer r et p comme liés par une équation réelle, ou mieux, comme exprimés l'un et l'autre en fonction du temps t. En différentiant et observant que l'on a

$$d.\mathrm{A}^p = d(\cos p + \mathrm{A}\sin p) = \mathrm{A}^p.\mathrm{A}dp,$$

il vient

$$\mathrm{x}' = \mathrm{B}\left(\mathrm{A}^p\frac{dr}{dt} + \mathrm{A}^{p+1}\frac{rdp}{dt}\right),$$

ce qui montre que $\frac{dr}{dt}$ est la composante de la vitesse parallèle au rayon vecteur $\mathrm{B}.r\mathrm{A}^p$, et $\frac{rdp}{dt}$ la vitesse perpendiculaire à ce vecteur, BA^p et $\mathrm{BA}^{p+1} = \mathrm{BA}^p.\mathrm{A}$ étant deux vecteurs perpendiculaires entre eux.

En différentiant de nouveau, on a

$$\mathrm{x}'' = \mathrm{B}\left[\mathrm{A}^p\left(\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{rdp^2}{dt^2}\right) + \mathrm{A}^{p+1}\left(2\frac{drdp}{dt^2} + \frac{rd^2p}{dt^2}\right)\right],$$

ce qui donne les composantes de l'accélération parallèlement et perpendiculairement au rayon vecteur.

719. Si l'accélération est constante en grandeur et en direction, on aura, A étant un vecteur constant,

$$\frac{d^2\mathrm{x}}{dt^2} = \mathrm{A},$$

d'où, B étant un second vecteur constant, qui représente la vitesse pour $t=0$,

$$\frac{d\mathrm{x}}{dt} = \mathrm{A}t + \mathrm{B}.$$

L'hodographe est donc une ligne droite, décrite uniformément.

On a ensuite, par une seconde intégration,

$$\mathrm{x} = \tfrac{1}{2}\mathrm{A}t^2 + \mathrm{B}t + \mathrm{C},$$

C étant le vecteur initial du point. Les deux composantes $\frac{1}{2}\mathrm{A}t^2$ et $\mathrm{B}t$ de $\mathrm{x}-\mathrm{C}$ variant proportionnellement l'une au carré, l'autre à la première puissance du temps, la courbe est une parabole.

Maintenant, si l'on élève au carré la quantité positive

$$-\mathfrak{S}\left[\mathrm{A}(\mathrm{x}-\mathrm{C}) + \tfrac{1}{2}\mathrm{B}^2\right] = -\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{A}^2t^2 + \mathfrak{S}\mathrm{AB}.t + \tfrac{1}{2}\mathrm{B}^2\right),$$

le résultat est égal au carré du produit

$$\mathrm{A}(\mathrm{x}-\mathrm{C}+\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}) = \mathrm{A}(\tfrac{1}{2}\mathrm{A}^2t^2 + \mathrm{B}t + \tfrac{1}{2}\mathrm{B}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}),$$

c'est-à-dire que l'on a, en égalant les racines et divisant par $\mathfrak{T}\mathrm{A}$,

$$\mathfrak{T}(\mathrm{x}-\mathrm{C}+\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}) = -\mathfrak{S}.\mathfrak{U}\mathrm{A}(\mathrm{x}-\mathrm{C}+\tfrac{1}{2}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^2).$$

Cette équation exprime que la distance du point x au point $\mathrm{F}=\mathrm{C}-\frac{1}{2}\mathrm{B}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$ est égale (art. 660) à la distance du même point au plan $\mathfrak{S}\mathrm{A}(\mathrm{x}-\mathrm{C}+\frac{1}{2}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^2)=0$. C'est l'équation d'un paraboloïde de révolution autour d'une parallèle au vecteur A, menée par le point F. On reconnaît là la propriété focale de la parabole.

La parabole sera l'intersection de cette surface avec le plan

$$\mathfrak{S}\mathrm{AB}(\mathrm{x}-\mathrm{C}) = 0.$$

La directrice sera l'intersection des plans

$$\mathfrak{S}\mathrm{A}(\mathrm{x}-\mathrm{C}+\tfrac{1}{2}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^2)=0, \quad \mathfrak{S}\mathrm{AB}(\mathrm{x}-\mathrm{C}+\tfrac{1}{2}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^2)=0.$$

Son vecteur $\mathrm{x}-\mathrm{C}+\frac{1}{2}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^2$ étant ainsi perpendiculaire à chacun

des vecteurs A et $\mathfrak{V}\text{AB}$, sera parallèle à $\mathfrak{V}(\text{A}.\mathfrak{V}\text{AB}) = \text{A}.\mathfrak{V}\text{AB}$, et par suite l'équation de cette droite pourra s'écrire

$$\text{X} - \text{C} = -\tfrac{1}{2}\text{A}^{-1}\text{B}^2 + t.\text{A}.\mathfrak{V}\text{AB}.$$

720. Pour que le mobile puisse atteindre un point P, lorsqu'il est lancé suivant le vecteur B avec une vitesse initiale v, il faut que, pour une valeur réelle de t, on puisse avoir

$$\text{P} = \tfrac{1}{2}\text{A}t^2 + tv\mathfrak{U}\text{B}.$$

En élevant au carré, pour avoir une équation à coefficients réels, on a, à cause de $(\mathfrak{U}\text{B})^2 = -1$,

$$(\tfrac{1}{2}\text{A}t^2 - \text{P})^2 = -t^2v^2.$$

ou

$$\tfrac{1}{4}\text{A}^2t^4 + (v^2 - \mathfrak{S}\text{AP})t^2 + \text{P}^2 = 0.$$

La condition de réalité des racines sera

$$(v^2 - \mathfrak{S}\text{AP})^2 - \text{A}^2\text{P}^2 > 0,$$

Or $\text{A}^2\text{P}^2 = (\mathfrak{T}\text{AP})^2$ ne pouvant être moindre que $(\mathfrak{S}\text{AP})^2$, on voit que, si les racines sont réelles, $v^2 - \mathfrak{S}\text{AP}$ doit être nécessairement positif. Donc les deux valeurs de t^2 sont positives, lorsqu'elles sont réelles. Il existe donc alors deux paraboles différentes correspondantes à la vitesse donnée, et passant par le point P. Les quatre valeurs de t, égales deux à deux et de signes contraires, correspondent aux deux mêmes paraboles, décrites dans des sens opposés.

Si les racines de l'équation en t^2 sont égales, c'est-à-dire si l'on a

$$v^2 - \mathfrak{S}\text{AP} = \mathfrak{T}\text{AP},$$

le lieu du point P est l'enveloppe des paraboles correspondantes à la même vitesse. Ce lieu est un paraboloïde de révolution, qui a son foyer à l'origine, son axe parallèle à A, et son plan directeur à la distance $\dfrac{v^2}{\mathfrak{T}\text{A}}$.

721. Supposons maintenant que l'accélération soit constam-

ment dirigée vers un centre fixe, que nous prendrons pour origine, et désignons par g sa grandeur. Nous aurons alors

$$\frac{d^2\mathrm{x}}{dt^2} = g.\mathfrak{U}\mathrm{x},$$

ou

(1) $$\mathfrak{V}\mathrm{x}\mathrm{x}' = 0.$$

En remarquant maintenant que

$$d.\mathfrak{V}(\mathrm{x}d\mathrm{x}) = \mathfrak{V}d(\mathrm{x}d\mathrm{x}) = \mathfrak{V}(d\mathrm{x}^2 + \mathrm{x}d^2\mathrm{x}) = \mathfrak{V}(\mathrm{x}d^2\mathrm{x}),$$

l'équation (1) donnera, par l'intégration,

(2) $$\mathfrak{V}\mathrm{x}\mathrm{x}' = \mathrm{c},$$

c étant un vecteur constant.

Cette intégrale fait voir que :

1° $\mathfrak{V}\mathrm{x}\mathrm{x}'$ étant parallèle à une direction constante, le plan de la biradiale $\mathrm{x}\mathrm{x}'$, ou le plan passant par la tangente à l'orbite et par l'origine est de direction constante. Donc l'orbite est plane, et son plan passe par le centre d'action.

2° L'aire du triangle compris entre les côtés x et x' étant égale à $\frac{1}{2}\mathfrak{T}\mathfrak{V}\mathrm{x}\mathrm{x}'$ (art. 646), on en conclut que l'aire décrite par le vecteur dans l'élément de temps dt est constante, et égale à

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{T}\mathfrak{V}\mathrm{x}d\mathrm{x} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{T}\mathrm{c}.dt.$$

722. Considérons maintenant le cas où l'accélération est inversement proportionnelle au carré de la distance, c'est-à-dire où l'on a

$$g = \frac{\mu}{(\mathfrak{T}\mathrm{x})^2},$$

la constante μ étant négative dans le cas où l'accélération est dirigée *vers* l'origine. On aura alors

(3) $$\mathrm{x}' = \mu\frac{\mathfrak{U}\mathrm{x}}{(\mathfrak{T}\mathrm{x})^2}.$$

Or nous avons trouvé (art. 603)

$$d\mathfrak{U}\mathrm{x} = -\frac{\mathfrak{U}\mathrm{x}.\mathfrak{V}\mathrm{x}d\mathrm{x}}{(\mathfrak{T}\mathrm{x})^2} = -\frac{\mathfrak{U}\mathrm{x}.\mathrm{c}dt}{(\mathfrak{T}\mathrm{x})^2}.$$

Donc

$$\mathrm{x}'.\mathrm{c}dt = -\mu.d\mathfrak{U}\mathrm{x},$$

d'où, en intégrant,

$$\mathrm{x}'\mathrm{c} = \mathrm{\kappa} - \mu\mathfrak{U}\mathrm{x},$$

$\mathrm{\kappa}$ étant un vecteur constant perpendiculaire à c, puisque l'équation (2) de l'article précédent donne $\mathfrak{S}\mathrm{x}'\mathrm{c}=0$, et $\mathfrak{S}\mathrm{x}\mathrm{c}=0$, d'où $\mathfrak{S}(\mathfrak{U}\mathrm{x}.\mathrm{c})=0$, ce qui montre que le vecteur $\mathrm{\kappa}=\mathrm{x}'\mathrm{c}+\mu\mathfrak{U}\mathrm{x}$ doit être perpendiculaire à c.

L'équation de l'hodographe est donc

$$(4) \qquad \mathrm{x}' = \mathrm{\kappa}\mathrm{c}^{-1} - \mu.\mathfrak{U}\mathrm{x}.\mathrm{c}^{-1}.$$

L'un des termes du second membre étant un vecteur constant, et l'autre un vecteur de module constant $\frac{-\mu}{\mathfrak{T}\mathrm{c}}$, il s'ensuit que $\mathfrak{T}(\mathrm{x}'-\mathrm{\kappa}\mathrm{c}^{-1})$ est constant. Donc l'hodographe est un cercle dont le plan est perpendiculaire à c, et partant parallèle à l'orbite; son rayon est $-\frac{\mu}{\mathfrak{T}\mathrm{c}}$, et son centre est au point $\mathrm{\kappa}\mathrm{c}^{-1}$. Le cercle peut être représenté par la combinaison de l'équation

$$\mathfrak{T}(\mathrm{x}'-\mathrm{\kappa}\mathrm{c}^{-1}) = -\frac{\mu}{\mathfrak{T}\mathrm{c}},$$

qui est celle d'une sphère, et de l'équation

$$\mathfrak{S}\mathrm{c}\mathrm{x}' = 0,$$

qui est celle d'un plan passant par l'origine et par le centre de la sphère.

723. En opérant sur l'équation (4) par $\mathfrak{V}\mathrm{x}\times$, il vient [art. 721, (2)]

$$\mathfrak{V}\mathrm{x}\mathrm{x}' = \mathrm{c} = \mathfrak{V}\mathrm{x}\mathrm{\kappa}\mathrm{c}^{-1} - \mu\mathfrak{V}(\mathrm{x}.\mathfrak{U}\mathrm{x}.\mathrm{c}^{-1}),$$

ou, à cause de $\mathrm{X}.\mathfrak{U}\mathrm{X} = \dfrac{\mathrm{X}^2}{\mathfrak{T}\mathrm{X}} = -\mathfrak{T}\mathrm{X}$,

$$\mathrm{c} = \mathfrak{V}\mathrm{X}\mathrm{K}\mathrm{c}^{-1} + \mu.\mathfrak{T}\mathrm{X}.\mathrm{c}^{-1}.$$

En opérant maintenant par $\mathfrak{S}\mathrm{c}\times$, on a

$$\mathrm{c}^2 = \mathfrak{S}\mathrm{K}\mathrm{X} + \mu.\mathfrak{T}\mathrm{X},$$

c'est-à-dire

(5) $$\mu\mathfrak{T}\mathrm{X} = \mathfrak{S}.\mathrm{K}(\mathrm{c}^2\mathrm{K}^{-1} - \mathrm{X}),$$

forme sous laquelle on reconnaît la propriété du foyer et de la directrice d'une section conique. C'est l'équation d'une surface du second ordre, de révolution autour de son axe principal K, l'origine étant à l'un des foyers. On obtiendra l'orbite, en coupant cette surface par le plan

$$\mathfrak{S}\mathrm{c}\mathrm{X} = 0.$$

Le vecteur qui donne la distance de la directrice au foyer est $\mathrm{c}^2\mathrm{K}^{-1}$; l'excentricité est $-\dfrac{\mathfrak{T}\mathrm{K}}{\mu}$, et le grand axe $\dfrac{2\mu\mathrm{c}^2}{\mu^2 + \mathrm{K}^2}$.

724. *Étant donnée une courbe*

$$\mathrm{Y} = \mathrm{F}(t),$$

trouver la condition pour que cette courbe puisse être l'hodographe d'une orbite centrale.

Y devant être égal à la dérivée du vecteur de l'orbite cherchée, ce vecteur sera égal à $\int \mathrm{Y}\,dt$, et par suite on aura, en vertu de l'équation (2) (art. 721),

(6) $$\mathfrak{V}(\mathrm{Y}\textstyle\int \mathrm{Y}\,dt) = \mathrm{c},$$

ce qui donne la condition cherchée.

Cette condition peut se mettre sous d'autres formes, plus approchantes de la forme cartésienne. On en tire, en différentiant,

(7) $$\mathfrak{V}(\mathrm{Y}'\textstyle\int \mathrm{Y}\,dt) = 0,$$

(8) $$\mathfrak{V}(\mathrm{Y}''\textstyle\int \mathrm{Y}\,dt + \mathrm{Y}'\mathrm{Y}) = 0.$$

L'équation (7) peut s'écrire, u étant réel,

$$\int \mathrm{Y}\,dt = u\mathrm{Y}', \tag{9}$$

ou, en opérant par $\mathfrak{D}\mathrm{Y}\times$,

$$\mathrm{c} = u.\mathfrak{D}\mathrm{Y}\mathrm{Y}'.$$

La courbe est donc située dans un plan perpendiculaire à c.

En opérant sur (9) par $\mathfrak{D}\mathrm{Y}''\times$, il vient, d'après (8),

$$u.\mathfrak{D}\mathrm{Y}''\mathrm{Y}' = -\mathfrak{D}\mathrm{Y}'\mathrm{Y},$$

d'où, en éliminant u,

$$\mathrm{c}.\mathfrak{D}\mathrm{Y}'\mathrm{Y}'' = -(\mathfrak{D}\mathrm{Y}\mathrm{Y}')^2.$$

Si maintenant w est la vitesse sur l'hodographe, ρ son rayon de courbure, ϖ la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente, on aura, conformément aux résultats connus.

$$hw = \rho\varpi^2,$$

h étant une constante.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

Algèbre des Quantités complèxes.

DEUXIÈME PARTIE.

Théorie des fonctions uniformes.

TROISIÈME PARTIE.

Théorie des fonctions multiformes.

QUATRIÈME PARTIE.

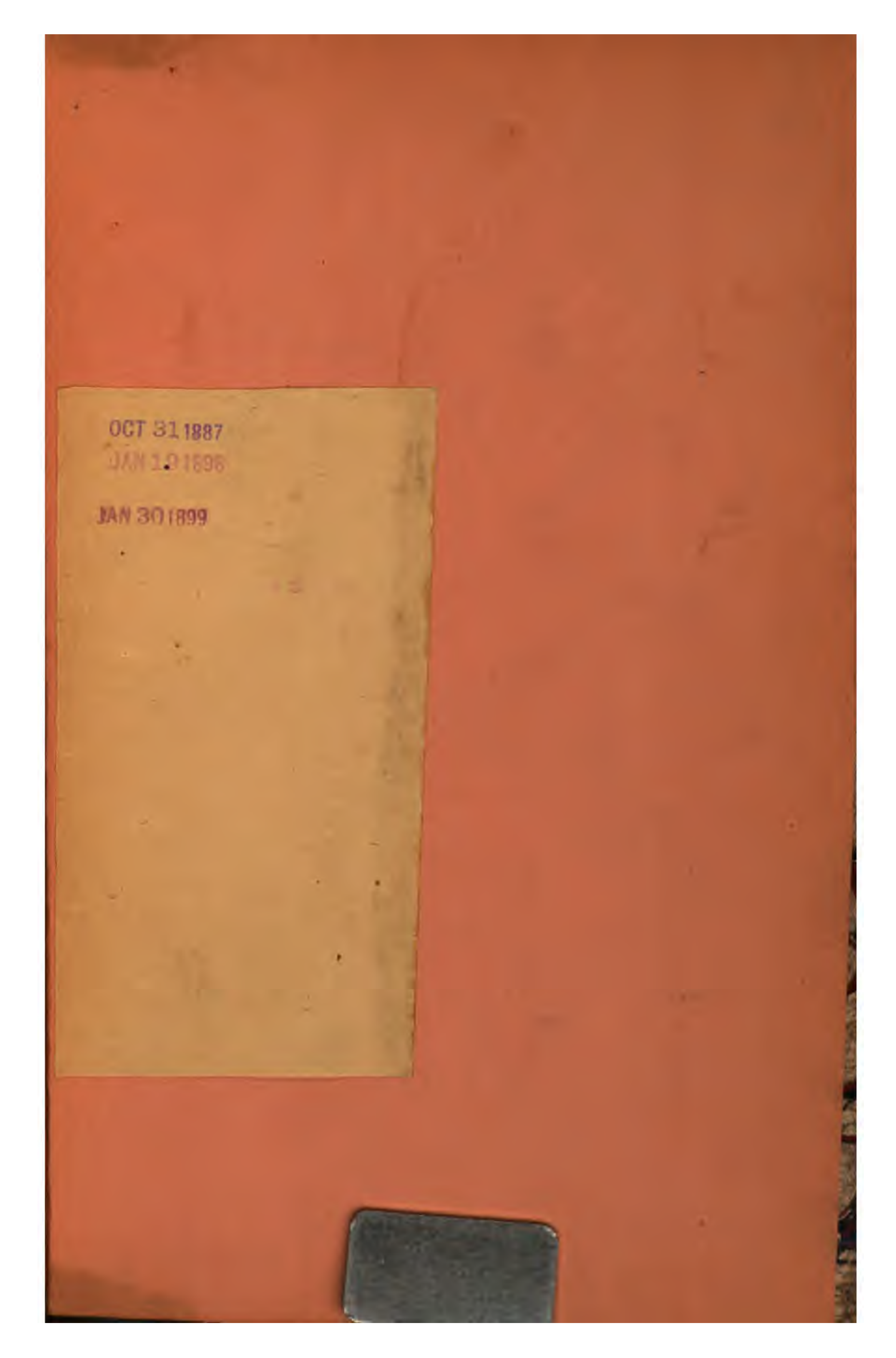
Applications géométriques de la Théorie des Quantités complexes. — Éléments de la Théorie des Quaternions.

Bordeaux. — Imp. G. Gounouilhou, rue Guiraude, 11.



TABLE

BORDEAUX. — IMP. G. GOUNOUILHOU, 11, RUE GUIRAUDE.


OCT 31 1887
JAN 10 1898
JAN 30 1899